MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère D
MATHEMATIQUES

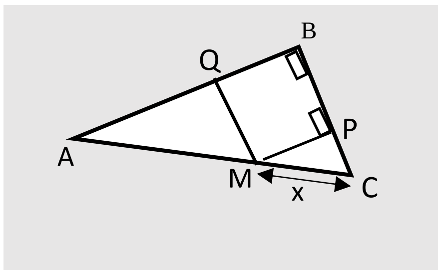
CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 09 heures   Code :

Compétence 1	**Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**
Thème 2	**Fonctions**

Leçon 6 : DERIVATION

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE



Lors de la préparation du concours d'excellence de sa région, un élève de première scientifique découvre dans ses recherches la figure ci-contre.
Cette figure est un triangle ABC rectangle en B tel que :
AB = 8 ; BC = 6 et AC = 10. À l'intérieur de ce triangle, on a construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$ $P \in]BC[$ et on a posé MC = *x*.
En faisant varier M de C à A, il constate que l'aire du rectangle croit puis décroit par la suite.
Il veut déterminer la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle BPMQ est maximale sans passer par la forme canonique. Après plusieurs tentatives sans succès, il présente la situation à toute la classe à un cours de Mathématiques.

Le professeur de mathématiques propose d'étudier ce problème d'optimisation en utilisant les dérivées de fonctions. Ensemble les élèves font des recherches sur la dérivation.

B. RESUME DE COURS

I. DERIVATION D'UNE FONCTION EN UN POINT

1. Nombre dérivé d'une fonction dérivable en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0.

Cette limite finie est appelée le **nombre dérivé de** f **en** $\boldsymbol{x_0}$ *et est notée* $\boldsymbol{f'(x_0)}$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2$.

En utilisant la définition, montrons que f est dérivable en 3.

On a : $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2-2)-7}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2-9)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$ et $6 \in \mathbb{R}$

Donc, la fonction f est dérivable en 3 et le nombre dérivé de f en 3 est : $f'(3) = 6$.

Exemple 2

Soit la fonction g de $[0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$.

On a: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ n'est pas un nombre réel, donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.

2. Interprétation graphique

Propriété

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et A un point de (C_f) d'abscisse x_0.

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet en son point A une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Une équation de (T) est : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit la fonction f définie et dérivable en 2 telle que $f(2) = -4$ et $f'(2) = -3$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).
Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

CORRIGÉ

Une équation de (T) est donc : $y = f'(x)(x-2) + f(2) = -3(x-2) - 4 = -3x + 2$
On a donc : $(T) : y = -3x + 2$.

3. **Dérivabilité et continuité**

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque

Réciproquement, f continue en x_0 n'implique pas que f dérivable en x_0.

En effet la fonction g de $[0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. (Voir exemple 2 ci-dessus)).

EXERCICE D'APPLICATION

Réponds par Vrai si l'affirmation est vraie ou par Faux sinon.

1-Toute fonction continue en x_0 est dérivable en x_0

2- Toute fonction qui n'est pas continue en x_0 n'est pas dérivable en x_0

3- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0

SOLUTION

1-Faux ; 2-Vrai ; 3-Vrai

II. FONCTION DERIVEE

1. **Définitions**

- **Fonction dérivable sur un intervalle**

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert K lorsqu'elle est dérivable en chaque élément de K.

- **Fonction dérivée**

Soit f une fonction numérique et K un intervalle ouvert sur lequel f est dérivable.
L'application qui à chaque élément x de K, associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur K et notée f'. $f' : \begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$

Exemple

Déterminons la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : g(x) = x^3.
Soit x_0 un nombre réel.
On a: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2 .$$

On a donc : $g'(x_0) = 3x_0^2$.

On conclut que la fonction dérivée de g est la fonction : $g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x^2$

Remarques

- On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction f, l'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle est notée f'

- Les fonctions élémentaires (constante, puissance, inverse), polynômes, rationnelles et trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle ouvert inclus dans leur ensemble de définition.

- Les fonctions élémentaires racine carrée et valeur absolue sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Dérivées de fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ ; \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto cos \ x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cos \ x$	$x \mapsto -sin \ x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto tan \ x$	$x \mapsto 1 + tan^2 x$ ou $x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE DE FIXATION

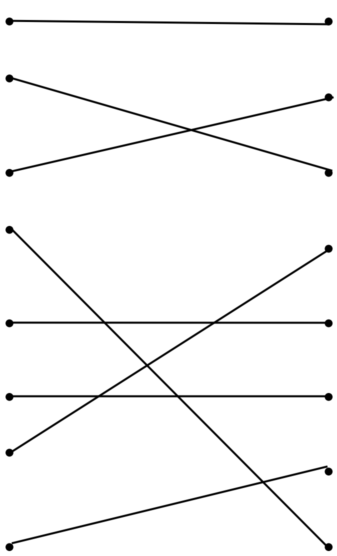
Relie chaque fonction à sa fonction dérivée

Fonction f
$x \mapsto -3$
$x \mapsto -3x$
$x \mapsto x^4$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$
$x \mapsto tan\ x$
$x \mapsto \sin\ x$

Fonction dérivée f'
$x \mapsto 0$
$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto -3$
$x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto -sin\ x$

SOLUTION

Fonction f
$x \mapsto -3$
$x \mapsto -3x$
$x \mapsto x^4$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x^4}$
$x \mapsto tan\ x$
$x \mapsto \sin\ x$



Fonction dérivée f'
$x \mapsto 0$
$x \mapsto 4x^3$
$x \mapsto -3$
$x \mapsto \frac{1}{cos^2 x}$
$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$x \mapsto cos\ x$
$x \mapsto -sin\ x$

3. **Dérivées et opérations**

Propriété

On suppose que u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$.

Fonction f	Fonction dérivée f'
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
$x \mapsto u(x)v(x)$	$x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$x \mapsto a\,u(x), (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\,u'(x)$
$x \mapsto \frac{1}{u(x)}$, ($u \neq 0$ sur K)	$x \mapsto \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$
$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$, ($v \neq 0$ sur K)	$x \mapsto \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$
$x \mapsto cos(ax+b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -asin(ax+b)$
$x \mapsto sin(ax+b), (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto acos(ax+b)$
$x \mapsto \sqrt{ax+b}, (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$

SOLUTION

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \cos(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \sin(x)$

2) $g(x) = \frac{x^2}{x+5}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, g'(x) = \frac{2x(x+5) - x^2}{(x+5)^2} = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}$

3) $h(x) = \sqrt{3x+6}$.

h est dérivable sur $]-2\ ;+\infty[$

On a : $h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

III. APPLICATIONS DE LA DERIVABILITE

1. Dérivée et sens de variation

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K
f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K
f est constante sur K si et seulement si f' est nulle surK

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.
f est stictement croissante sur K si et seulement si f' est strictement positive surK
f est stictement décroissante sur K si et seulement si f' est stictement négative surK

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - 3x$.

1- Détermine $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2- Détermine les sens de variation de f.

SOLUTION

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$;

2) **Signe de $f'(x)$**

Soit x un nombre réel

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -1$
- $\forall\ x \in\ ]-1\ ;1[, f'(x) < 0$;
- $\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty1[, f'(x) > 0$

Variation de f

$\forall\ x \in\ ]-1\ ;1[, f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-1\ ;1[$,
$\forall\ x \in\ ]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]1\ ;+\infty1[, f'(x) > 0$; donc $f$est strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1[$ et sur $]1\ ;+\infty1[$.

Remarques

- Si f' est positive sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement croissante sur K

- Si f' est négative sur K et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de K alors f est strictement décroissante sur K

2. Extremums relatifs d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de K.
Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f .

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum relatif de f

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ est un minimum relatif de f

EXERCICE DE FIXATION

On donne le tableau de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

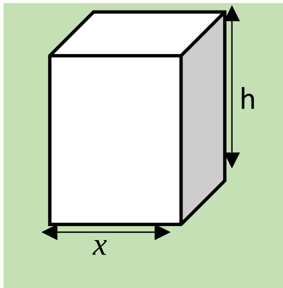
x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	$\boxed{27/4}$	$\nearrow$	

Indique l'extremum relatif de g

SOLUTION

La dérivée de g s'annule en $\frac{3}{2}$ en changeant de signe. Donc, la fonction g admet en $\frac{3}{2}$ un minimum relatif égal $\frac{27}{4}$.

C. SITUATION COMPLEXE



Monsieur Moussa est un menuisier. Il veut confectionner une caisse en bois semblable à un pavé droit tel que représenté sur la figure ci-contre.
Cette caisse doit avoir les caractéristiques suivantes :
- Son volume est égal à 8 m^3 ;
- Sa base est un carré.

Monsieur Moussa se demande quelles dimensions doivent avoir la base et la hauteur de cette caisse afin d'utiliser le moins de bois possible pour minimiser les dépenses. Ne sachant comment effectuer ses calculs, il te sollicite.
En utilisant tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Moussa dans une production écrite.

SOLUTION

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser nos connaissances sur les fonctions et particulièrement la leçon dérivation.
Pour cela, je vais :
- exprimer l'aire de la surface totale du solide en fonction de x,
- étudier la fonction obtenue pour trouver ses éventuelles extremums
- conclure

- Notons V le volume de la caisse et S sa surface de base.
  On a : $h = \frac{V}{S} = \frac{8}{x^2}$
- La caisse à deux faces carrées qui ont pour aire est : $2x^2$
- La caisse a 4 faces rectangulaires qui ont pour aire : $4 \times \left(x \times \frac{8}{x^2}\right) = \frac{32}{x}$

  L'aire de la surface totale est : $f(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}$.

- La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4}{x^2}(x^3 - 8)$

$\forall x \in]0;\ 2[, f'(x) < 0$; $\forall x \in]2;\ +\infty[, f'(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $]0; 2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			16		

16 est le minimum de f

Moussa utilisera moins de bois lorsque L'aire de la surface totale est minimale c'est-à-dire lorsque la longueur x du côté de la base mesure 2 m et la hauteur de la caisse mesure également 2 m.

D-EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le réel x_0.
Indique dans quel cas la fonction f est dérivable en x_0

$a)$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$;

b) La limite en x_0 de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas ;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -3$.

Solution

f est dérivable dans le cas d)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calcule, en utilisant la définition, le nombre dérivé de f en x_0

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$; $\quad x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $\quad x_0 = 2$

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x^2+2x-3)+4}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x+1) = 0$

donc $\quad f(-1) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x+1} = -1$

donc $f'(0) = -1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{7}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{7})(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{3}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{7})} = \frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$;

donc $f'(2) = \frac{3\sqrt{7}}{14}$

<u>Exercice 3</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative.

Détermine une équation de la tangente (T) à (C)au point d'abscisse -2.

Solution

Les calculs donnent : $f'(-2) = -\frac{1}{4} \quad et \quad f(-2) = -\frac{1}{2}$.

Une équation de (T) est donc : $y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2}$ ou encore $(T): y = -\frac{1}{4}x - 1$.

<u>Exercice 4</u>

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction dérivée f' de f sur L'intervalle K

a) $f(x) = \sqrt{x}$; $\quad K =]0;\ +\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $\quad K =]-1;\ +\infty[$

Solution

a) Soit x_0 un élément de $]0;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction dérivée de f est définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Soit x_0 un élément de $]-1;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x_0+1}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{(x+1)(x_0+1)}}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{(x+1)(x_0+1)} = \frac{-1}{(x_0+1)^2}$$

La fonction dérivée de f sur $]-1;\ +\infty[$ est définie par : $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Exercice 5

Recopie le tableau puis réponds par Vrai (V) si l'affirmation est vrai ou par Faux (F) sinon

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$.	
$Si\ f(x) = (-2x+5)^6$alors $f'(x) = -12(-2x+4)^5$.	
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.	
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K.	

Solution

Affirmations	V ou F
f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$.	F
$Si\ f(x) = (-2x+5)^6$alors $f'(x) = -12(-2x+4)^5$.	V
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K sur lequel elle ne s'annule pas alors : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2}$	F
Si $f'(a) = 0$ alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.	F
Si la fonction f est positive sur un intervalle K alors f est croissante sur K.	F

Exercice 6

Détermine la fonction dérivée de f dans chacun des cas suivants :
(Tu préciseras l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chaque cas)

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$

b) $f(x) = (25x-1)^4$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x+\pi)$

Solution

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x + 5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

b) $f(x) = (25x-1)^4$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 100(25x-1)^3$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f'(x) = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et on a: $\forall x \in]-\infty;1[,\ f'(x) = \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$

e) $f(x) = \tan(2x+\pi)$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et on a:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},\ f'(x) = 1 + tan^2(2x+\pi)$

B) Exercices de renforcement

Exercice 7

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

1. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$
   b) Etudie les variations de h.
2. a) Dresse le tableau de variation de h.
   b) Déduis-en les extrema de la fonction h.
3. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe de h au point d'abscisse 0

Solution

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = x^2 - 2x - 3$. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

donc: $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x+1)(x-3)$

b) $\forall x \in]-\infty;\ -1[\cup]3;\ +\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty;\ -1[$ et $]3;\ +\infty[$

$\forall x \in [-1;3], h'(x) \leq 0$ donc h est strictement décroissante sur $[-1;3]$

2) a)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	

b) $\frac{11}{3}$ est un maximum relatif de h

-7 est un minimum relatif de h

3) $h(0) = 2$; $h'(0) = -3$. Une équation de (T) est : $y = -3x + 2$

Exercice 8

Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :
$g(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$; On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I , J)

1) Détermine les nombres réels a et b sachant que :
- (Γ) passe par le point $\mathrm{A}(2; 2)$
- $f'(2) = 0$

2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 2.

3. Dans la suite, on prend : $a = -1$ et $b = 3$
a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$
b) Etudie les variations de g.

Solution

1) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = a + \frac{1}{(3-x)^2}$. On a : $g'(2) = a + 1$; donc $g'(2) = 0 \Leftrightarrow a = -1$
On : $g(2) = 2a + b + 1 = b - 1$; or $g(2) = 2$ donc $b = 3$
2) $g(2) = 2$ et $g'(2) = 0$. Une équation de (T) est : $y = 2$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, g'(x) = -1 + \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1-(3-x)^2}{(3-x)^2} = \frac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2}$

b) $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[, g'(x) < 0$

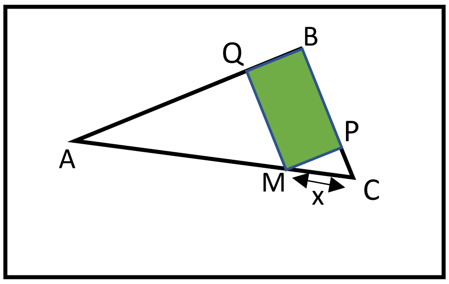
$\forall x \in]2; 3[\cup]3; 4[, g'(x) > 0$. On en déduit que :

- g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et $]4; +\infty[$
- g est strictement croissante sur $]2; 3[$ et $]3; 4[$

C) Exercice d'approfondissement

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABC est un triangle rectangle en B tel que : AB = 8 ; BC = 6 et AC = 10.
A l'intérieur de ce triangle, on construit le rectangle BPMQ avec $M \in]AC[$; $Q \in]AB[$
$P \in]BC[$ et on pose : MC = x.



1. Exprime MQ et MP en fonction de x.
2. On désigne par f la fonction définie et dérivable sur $]0; 10[$et représentant l'aire du rectangle BPMQ. On a donc $f(x) = \text{MQ.MP}$
   a) Justifie que $f(x) = \frac{12}{5}x\left(2 - \frac{1}{5}x\right)$.
   b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
3. Déduis-en la valeur de x pour que l'aire du rectangle BPMQ soit maximale et calcule alors cette aire.

Solution

1) Considérons le triangle ABC ; M est point de (AC) , Q est un point de (AB) et (MQ) parallèle à (BC) ; donc on a : $\frac{AM}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{MQ}{BC}$ ce qui donne : $\frac{10-x}{10} = \frac{AQ}{8} = \frac{MQ}{6}$
D'où : $MQ = 6 - \frac{3x}{5}$

Le triangle CMP est rectangle est rectangle en P. D'après la propriété de Pythagore on a :
$CM^2 = MP^2 + PC^2$ donc : $MP^2 = CM^2 - PC^2 = x^2 - (BC - MQ)^2$
On en déduit que : $MP = \frac{4x}{5}$
2a) $f(x) = MP \times PQ = \frac{4x}{5}\left(6 - \frac{3x}{5}\right) = \frac{12x}{5}(2 - \frac{x}{5})$
 b) $\forall x \in]0; 10[, f'(x) = \frac{24}{5}\left(1 - \frac{x}{5}\right) = \frac{24}{25}(5 - x)$
 $\forall x \in]0; 5[, f'(x) > 0$; $\forall x \in]5; 10[, f'(x) < 0$
$f$est strictement croissante sur $]0; 5[$ et strictement décroissante sur $]5; 10[$

3)

x	0	5	10
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	12	$\searrow$

L'aire du rectangle est maximum pour x égal à 5 . L'aire du rectangle est alors de 12 cm²