TERMINALE CDE

PHYSIQUE CHIMIE

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME: MECANIQUE

TITRE DE LA LEÇON : <u>OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES</u>

I. <u>SITUATION D'APPRENTISSAGE</u>

Un élève en classe de T^{le}C au Lycée Moderne d'Agnibilekrou découvre dans une revue scientifique les informations suivantes : « L'amortisseur d'une automobile fonctionne avec des ressorts de suspension pour assurer le confort à bord du véhicule ainsi que sa bonne tenue de route. Les amortisseurs maintiennent les roues en contact avec le sol. Chaque ressort subit une compression et une détente continue en perdant à chaque fois un peu d'énergie. La fréquence et l'ampleur des mouvements occasionnés par le ressort doivent être contrôlés. ».

Voulant en savoir davantage, l'élève informe ses camarades et ensemble, ils entreprennent de définir un oscillateur mécanique, de déterminer son équation différentielle et les caractéristiques du mouvement d'un oscillateur mécanique non amorti puis de montrer la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti.

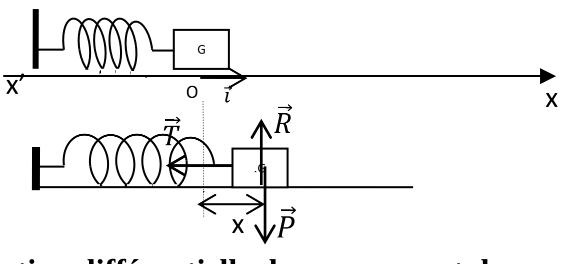
II. <u>CONTENU DE LA LECON</u>

1- <u>QUELQUES DEFINITIONS</u>

- **Un mouvement oscillatoire libre d'un solide** est un mouvement périodique autour de la position d'équilibre stable de ce solide lorsqu'il est abandonné à lui-même.
- **Un oscillateur mécanique** est un système mécanique qui effectue un mouvement périodique autour de la position d'équilibre.
- **La période** notée(**T**) est la durée d'une oscillation complète (ou d'un va et vient).
- **La fréquence** notée (**f** ou **N**) est le nombre d'oscillations complètes par seconde.
  $\boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}$et ω= 2πN=$\frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{T}}$

2- <u>PENDULE ELASTIQUE</u>

2.1 Le pendule élastique horizontal



2.2 <u>Equation différentielle du mouvement des oscillations libres non amorties</u>

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0 \quad ou \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

2.3 Solution de l'équation différentielle

$x(t)=X_m\cos(\omega_o t+\varphi)$ ou $x(t)=X_m\sin(\omega_o t+\varphi)$

Avec : $x(t)$: élongation du mouvement à t quelconque (en mètre) ;

X_m : élongation maximale ou amplitude du mouvement (en mètre) ;

$\omega_o t$: phase du mouvement à la date t (en radian) ;

φ phase du mouvement à l'origine des dates (en radian)

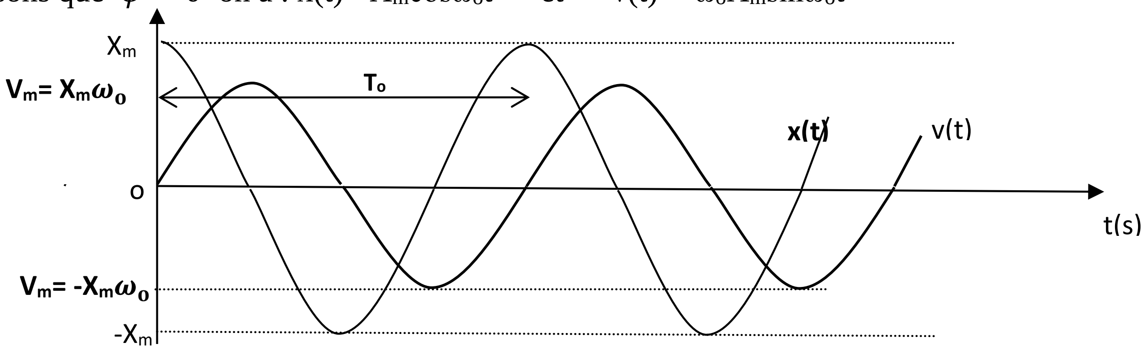
La pulsation propre de l'oscillateur est : $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en rad/s)

La période propre de l'oscillateur est : $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (en seconde)

La fréquence propre de l'oscillateur est : $N_o = \frac{1}{T_o}$ (en hertz)

2.4 Représentation de x(t) et v(t) sur deux périodes

Supposons que $\varphi = 0$ on a : $x(t)= X_m\cos\omega_o t$ et $v(t)= -\omega_o X_m\sin\omega_o t$



3- ETUDE ENERGETIQUE

3.1 Energie potentielle élastique

$E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_o t+\varphi)$

3.2 Energie cinétique

$E_c=\frac{1}{2}mv^2= \frac{1}{2}kX^2_m\sin^2(\omega_o t+\varphi)$ car $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

3.3 Energie mécanique

$E_m=\frac{1}{2}kX^2_m= \frac{1}{2}mV^2_m=\frac{1}{2}m\omega^2_O X^2_m=$ **Cste**

SITUATION D'EVALUATION

Lors d'une séance de TP, ton groupe étudie les oscillations mécaniques libres d'un pendule horizontal afin de déterminer son équation horaire. Il dispose d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $k = 10N.m^{-1}$. Ton groupe engage le ressort sur une tige horizontale Ax. L'une de ses extrémités est fixée en A, l'autre est reliée à un cylindre creux C de masse m=0,1kg qui peut glisser le long de la tige. L'abscisse x du centre d'inertie G de C est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.

Le groupe écarte le cylindre de sa position d'équilibre et le lâche. A l'instant t=0s, choisi pour origine des dates, son abscisse est x_0= 2cm et la vitesse sur Ax est V_{Ox}= -0,2m.s^{-1}.
Tu es le rapporteur.
Tu négligeras les frottements et tu considèreras que l'énergie potentielle pour la position d'équilibre du système est nulle.
1) Calcule l'énergie mécanique de l'oscillateur à t=0s.
2) Détermine, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique :
2-1-la vitesse de C au passage par la position d'équilibre ;
2-2-les positions de C pour lesquelles la vitesse s'annule.
3)
3-1-Etablis l'équation différentielle du mouvement de C.
3-2-Déduis-en l'équation horaire du mouvement de C.

Solution

1) Energie mécanique de l'oscillateur à t=0s

$E_0 = E_{C0} + E_{P0} = \frac{1}{2}m\mathrm{V}_0^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}\mathrm{x}_0^2$ AN : E_0= 4.10^{-3} J

2)

2-1- La vitesse de C à la position d'équilibre

E= cste donc $E_0 = E_1 = \frac{1}{2}m\mathrm{V}_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ AN : $V_1 = 0{,}28\ m.s^{-1}$

2-2- Les positions de C

V=0 ; $E_0 = E_2 = \frac{1}{2}\mathrm{k}\,X^2 \Rightarrow X = \mp\sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ AN : $X = 0{,}028\ m$ ou $X = -0{,}028\ m$

3)

3-1-Equation différentielle et équation horaire.

- Système : le cylindre
- Bilan des forces : Poids$\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du ressort et la réaction normale$\vec{R}$.

En appliquant le théorème du centre d'inertie on obtient : $\vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{T}} + \vec{R} = \boldsymbol{m\vec{a}}$

Par projection sur l'axe Ax : $-\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m.a}$ donc

$\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = 0}$ Soit $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

3-2-Equation horaire du mouvement

Une des solutions de cette équation est de la forme : $\boldsymbol{x = X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)}$ **et** $\boldsymbol{\dot{x} = -\omega_0 X_m \cos(\omega_0 t+\varphi)}$

A *t=0s,* x_0= $\boldsymbol{x = X_m\cos(\varphi)}$ *et* $\boldsymbol{\dot{x} = -\omega_0 X_m\cos(\varphi)} = v_0$ *ce qui donne:*

tan $(\boldsymbol{\varphi}) = -\frac{v0}{\boldsymbol{\omega_0}.v0}$ **AN** **φ=π/4 rad. Et** $X_m = \frac{x0}{\cos(\boldsymbol{\varphi})}$ *d'où* X_m= 2,82 cm.

L'équation horaire est donc : ***2,82.10^{-2}*** **cos (10t+π/4)**

III. EXERCICES

Exercice 1

L'équation horaire du mouvement d'un mouvement mobile ponctuel est données par :
x =2.10^{-2}cos(40πt-$\frac{\pi}{6}$) en unités S.I. La constante de raideur du ressort est :k=100N /m

1-Précise les valeurs de l'amplitude, de la période, de la fréquence et de la phase initiale du mouvement de ce point matériel.
2-Calcule la vitesse et l'accélération de ce point matériel à la date t=0
3-Montre que l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante et déduis-en sa valeur.

Solution

1-Précisons les valeurs de l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale
La solution est de la forme :$\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega_0 t+\varphi)}$.
L'équation horaire est: $\boldsymbol{x = 2.10^{-2}cos(40\pi t - \frac{\pi}{6})}$**.** Donc par identification, on a**:**

- L'amplitude : $\boldsymbol{X_m = 2.10^{-2}m}$ **;**
- La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ or $\omega_0 = 40\pi rad/s$ donc $T_0 = \frac{2\pi}{40\pi} = 0{,}05\ s$ ou $\boldsymbol{5.10^{-2}}$ **s**
- La fréquence propre **:**$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}05} = 20Hz.$
- La phase initiale:$\boldsymbol{\varphi} = -\frac{\pi}{6}rad.$

2. Calculons la vitesse et l'accélération du point matériel à l'instant t= 0s.
Déterminons d'abord la vitesse v et l'accélération a du point matériel à chaque instant.

- $x = 2.10^{-2}cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow v = \dot{x} = -2.10^{-2} \times 40\pi sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}8\,\pi sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right).$
- $v = -0{,}8\,\pi sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 2

Complète le texte ci-dessous avec les mots ou groupes de mots suivants : ***fréquence ; période par seconde ; l'amplitude des oscillations ; diminue ; la période ; est constante ; une oscillation.***

Un oscillateur mécanique effectue un mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre. Un va-et-vient représente …………………… . Sa durée correspond à ……………………..des oscillations. La ………………… des oscillations quant à elle, elle est le nombre de …………………….. .Lorsque l'oscillateur mécanique n'est pas amorti, sont énergie totale …………………….. . Cependant cette énergie ……………………. Si les oscillations sont amorties. Dans ce cas, ………………………. diminue à cause des pertes d'énergie. Pour compenser ces pertes, un apport extérieur d'énergie est nécessaire.

Solution:

Un oscillateur mécanique effectue un mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre. Un va-et-vient représente ***une oscillation***. Sa durée correspond à ***la période*** des oscillations. La ***fréquence*** des oscillations quant à elle, elle est le nombre de ***périodes par semaine***. Lorsque l'oscillateur mécanique n'est pas amorti, sont énergie totale ***est constante***. Cependant cette énergie ***diminue*** si les oscillations sont amorties. Dans ce cas, ***l'amplitude des oscillations*** diminue à cause des pertes d'énergie. Pour compenser ces pertes, un apport extérieur d'énergie est nécessaire.

Exercice 3

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) aux affirmations suivantes en mettant une croix dans la case qui convient

	Vrai	Faux
1) Un oscillateur est un système qui effectue un mouvement de translation		
2) L'oscillateur est dit libre, lorsqu'écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même, effectue des oscillations.		
3) Lorsqu'un oscillateur n'est soumis à aucune force dissipative: Il est non amorti.		
4) La durée d'une oscillation complète est une période		
5) La Fréquence correspond au nombre d'oscillations par unité de temps		

Solution

	Vrai	Faux
1) Un oscillateur est un système qui effectue un mouvement de translation		X
2) L'oscillateur est dit libre, lorsqu'écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même, effectue des oscillations.	X	
3) Lorsqu'un oscillateur n'est soumis à aucune force dissipative: Il est non amorti.	X	
4) La durée d'une oscillation complète est une période	X	
5) La Fréquence correspond au nombre d'oscillations	X	

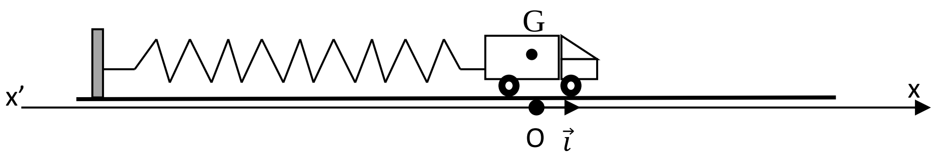
Exercice 4

Ton petit frère possède un jeu constitué d'une ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de constante de raideur k et d'une voiturette de masse m accrochée à l'extrémité libre du ressort. L'ensemble est posé sur une table horizontale où les frottements sont négligés.

La position du centre d'inertie de la voiturette peut être déterminée sur un axe horizontal (x'x) muni d'un repère (O, $\vec{i}$). A l'équilibre, le centre d'inertie G de la voiturette se trouve à l'origine du repère.

Ton petit frère déplace la voiturette vers la gauche jusqu'à l'abscisse x_o puis à l'instant t_o, il la libère sans vitesse initiale. Le système {voiturette + ressort} se met alors à osciller.

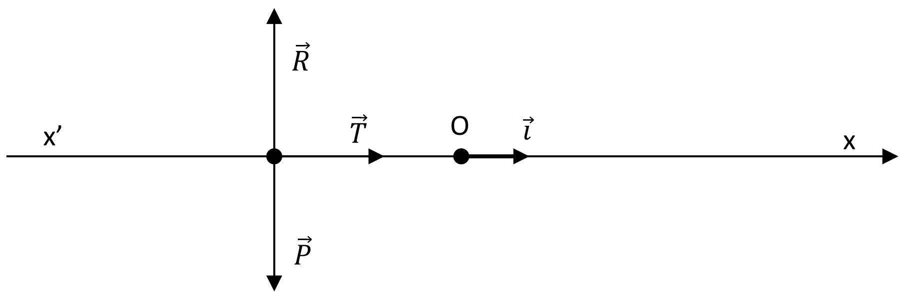
Données : m = 250 g ; k = 100 $N.m^{-1}$; x_o = - 15 cm ; t_o = 0 s.



Il t'est demandé d'établir l'équation horaire du mouvement de la voiturette.

1) Nomme les forces extérieures qui s'exercent sur la voiturette pour $x \neq 0$.
2) Représente ces forces dans une position de G où $x < 0$.
3) Etablis l'équation différentielle du mouvement du système.
4) Détermine l'expression de x(t) sous la forme $x = X_m\cos(\omega_o t + \varphi)$ et celle de v(t), en précisant les valeurs numériques de X_m, ω_o et φ.

1) **Solution**:
2) Les forces extérieures qui s'exercent sur la voiturette sont :
   le poids $\vec{P}$ de la voiturette ; la réaction $\vec{R}$ du support ; la tension $\vec{T}$ du fil.
3) Représentation de $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$ pour $x < 0$



4) Equation différentielle du mouvement :

TCI : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projection suivant (x'x) : T = ma avec T = - kx

Donc $-kx = ma = m\ddot{x}$; soit $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

5) Expression de x(t) et de v(t) :

La solution de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = X_m\cos(\omega_o t + \varphi)$

A t= 0 s, $x_o = X_m\cos\varphi = -0,15$ et $v_o = -X_m\omega_o\sin\varphi = 0$

$\sin\varphi = 0$ $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

Soit $\cos 0 = 1$ ou $\cos\pi = -1$

De plus, $X_m > 0 \longrightarrow \cos\varphi < 0$

D'où $\boldsymbol{\varphi = \pi}$ rad cad $x(t) = X_m\cos(\omega_o t + \pi)$ avec $\mathbf{X_m = 0,15\ m}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

soit $\boldsymbol{\omega_o = 20}$ **rad/s**

$\mathbf{x(t) = 0,15\cos(20t + \boldsymbol{\pi})}$ **et** $\mathbf{v(t) = -3\sin(20t + \boldsymbol{\pi})}$

<u>Exercice 5</u>

Lors d'une séance de TP, ton groupe étudie les oscillations mécaniques libres d'un pendule horizontal afin de représenter son équation horaire.

Le pendule est constitué d'un solide de masse m, de centre d'inertie G, attaché à libre d'un ressort horizontal de raideur k. Il a un mouvement rectiligne horizontal. Au cours de ce mouvement, le solide passe à la position initiale $x_o = 0$ m avec une vitesse de valeur v_o, orienté vers l'extrémité fixe.

Données : m = 0,1 kg ; $v_o = 0,5\ m.s^{-1}$; $\omega_o = 7,85$ rad/s ; $\pi = 3,14$ rad

Echelle : 1,5 cm pour 1 cm (en ordonnée) et 1cm pour 0,2 s (en abscisse)

Tu es choisi pour la rédaction du compte rendu.

1) Etablis l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide.
2) Détermine :
   2.1) la période propre T_o de l'oscillateur ;
   2.2) la phase φ à l'origine des dates et l'amplitude X_m des oscillations;
   2. 3) la constante de raideur k.
   2.4) l'équation horaire du centre d'inertie du solide.
3) Représente sur deux périodes l'équation horaire du mouvement.

Solution:

1) Equation différentielle du mouvement de G.
   Système : solide de masse m
   Forces extérieures :
   le poids $\vec{P}$ de la voiturette ; la réaction $\vec{R}$ du support ; la tension $\vec{T}$ du fil.

Théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projection suivant (x'x) : - T = ma

Donc –kx = ma = m$\ddot{x}$; soit $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

2.1) Période propre $T_o = \frac{2\pi}{\omega_O}$ AN $T_o = \frac{2x3,14}{7,85} = 0,8$ s

2.2) Phase φ et amplitude X_m

A t = 0s, x(o) = $X_m\cos\varphi = 0$ et v(0) = - $X_m\omega_0\sin\varphi$ = - 0,5

$\cos\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

Or $X_m > 0$; d'où $\sin\varphi > 0$ cad $\boldsymbol{\varphi = +\frac{\pi}{2}}$

Par conséquent, $X_m = \frac{0,5}{\omega_O sin\varphi} \longrightarrow X_m = \frac{0,5}{7,85\ x\ 1} \longrightarrow$ $\boldsymbol{X_m = 0,064m}$

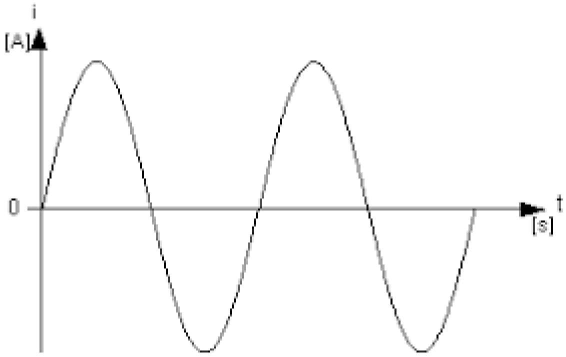
2.3) la constante de raideur k.

$\boldsymbol{k = \frac{\omega_o^2}{m}}$ **AN : k =** $\boldsymbol{\frac{(7,85)^2}{0,1}}$ **= 616 N.m**$^{-1}$

2.4) l'équation horaire de G

$x(t) = 6,4.10^{-2}\cos(7,85t + \frac{\pi}{2})$

3) Représentation de x(t)



IV. <u>DOCUMENTATION</u>

RESSORT DE SUSPENSION

1. Fonction

Le ressort de suspension est associé à la roue de chaque demi-train (train avant et train arrière) de la voiture. Son rôle est important pour la tenue de route du véhicule.

Il absorbe les irrégularités de la route dans le but de:

- Maintenir les roues en contact avec le sol et permettre ainsi un bonne tenue de route.
- Filtrer les chocs consécutifs à la déformation et aux aspérités de la route pour assurer un confort acceptable aux passagers du véhicule et protéger les organes mécaniques et la coque du véhicule.

2. Description

Il fait la liaison entre le châssis et les organes suspendus et les éléments des trains roulant non suspendus, autrement dit tous les organes qui encaissent les chocs dus au contact avec la route.
Il est de forme hélicoïdale, en acier trempé, formé de plusieurs spires, ce qui rend son mouvement élastique. L'énergie accumulée par les chocs dans les roues est progressivement dissipée dans les oscillations. Il travaille de concert avec l'amortisseur qui limite ses oscillations.

Source: Google