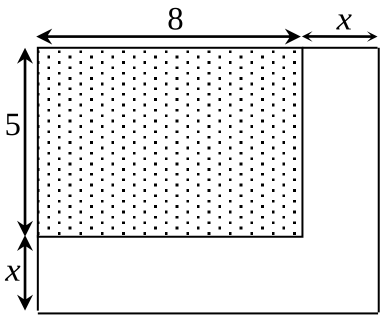
Leçon 1 : Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire utilise un terrain rectangulaire dont la largeur et la longueur mesurent respectivement 5m et 8m pour produire des tomates. Pour augmenter la production, le responsable de la coopérative informe que les côtés du terrain doivent être augmentés chacun d'une longueur identique comme l'indique la figure ci-dessous pour avoir un terrain rectangulaire dont l'aire sera de 88m^2.
Curieux, des élèves de la classe de première A présents, désirent connaitre le nombre de mètres à ajouter pour avoir l'aire voulue. Ils sollicitent leur professeur de mathématique pour en savoir plus.



B. CONTENU DE LA LEÇON

1. Polynômes du second degré

Définition

Toute expression de la forme $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$,
est appelée ***polynôme du second degré***.

Vocabulaire

Le coefficient du terme de degré 2 est a .
Le coefficient du terme de degré 1 est b
Le coefficient du terme de degré 0 est c

Exemple :

Les expressions x^2+4x+3 ; $4x^2$ et $3x^2-1$ sont des polynômes du second degré car elles sont de la forme ax^2+bx+c.

• Les coefficients de x^2+4x+3 sont : $a=1$; $b=4$ et $c=3$.
• Les coefficients de $4x^2$ sont : $a=4$; $b=0$ et $c=0$.
• Les coefficients de $3x^2-1$ sont : $a=3$; $b=0$ et $c=-1$

Exercice de fixation

Pour chacun des polynômes du second degré suivants trouve les réels a ;b et c :
$-4x^2+x+10$; x^2+3x ; $5x^2-4$; $-10x^2$

Solution

▪ Les coefficients de $-4x^2+x+10$; sont : $a=-4$; $b=1$ et $c=10$.
▪ Les coefficients de x^2+3x sont : $a=1$; $b=3$ et $c=0$.
▪ Les coefficients de $5x^2-4$ sont : $a=5$; $b=0$ et $c=-4$.
▪ Les coefficients de -10x^2 sont : $a=-10$; $b=0$ et $c=0$.

2-Equations du second degré dans $\mathbb{R}$

2-1 Définition

Soit ax^2+bx+c où $a \neq 0$ un polynôme du second degré
Toute équation du type $ax^2+bx+c=0$, est appelée **équation du second degré dans** $\mathbb{R}$.

Exemples

$x^2+4x+3=0$ et $5x^2-4=0$ sont des équations du second degré dans $\mathbb{R}$

2-2 Notion de discriminant

Définition

Soit l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où $a \neq 0$
Le nombre réel noté Δ tel que : $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac}$ est appelé le **discriminant** de cette équation**.**
Δ est aussi appelé le **discriminant** du polynôme du second degré ax^2+bx+c.

Exemple

On donne l'équation $x^2+4x+3=0$
$\Delta = \boldsymbol{4^2-4\times 1\times 3=4}$

Exercice de fixation
Calcule le discriminant de chacun des polynômes suivants
a) $2x^2 - 3x + 1$; b) $x^2 - 4x + 4$; c) $x^2 + x + 1$

Solution
a) Pour le polynôme $2x^2 - 3x + 1$, on a : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$
b) Pour le polynôme$x^2 - 4x + 4$, on a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
c) Pour le polynôme $x^2 + x + 1$ on a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

2-3 Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Méthode
Pour résoudre dans$\mathbb{R}$ une équation du second degré $(E): ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, on peut calculer le discriminant Δ ($\Delta = b^2 - 4ac$) puis utiliser le tableau suivant:

Signe de Δ	Nombre de solutions	Calcul des solutions
$\Delta < 0$	(E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	
$\Delta = 0$	(E) a une solution	$x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	(E) a deux solutions distinctes	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque :
Lorsqu'elles existent, les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) sont appelées **les zéros** ou **les racines** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Exercice de fixation
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
$(\boldsymbol{E_1}) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$; $(\boldsymbol{E_2}) : 2x^2 - 4x + 2 = 0$; $(\boldsymbol{E_3}) : x^2 - x + 7 = 0$.

Solution
•$(\boldsymbol{E_1}) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$$

$\Delta > 0$ alors (E_1) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :
$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 2} = 1$
1 et $\frac{3}{2}$ sont solutions de l'équation (E_1)
Donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$
•$(\boldsymbol{E_2}) : 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$ alors $(\boldsymbol{E_2})$ admet une solution unique $x_0 = -\frac{-4}{2\times 2} = 1$.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$.
• $(\boldsymbol{E_3}) : x^2 - x + 7 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 1 - 28 = -27$$

$\Delta < 0$ alors $(\boldsymbol{E_3})$ n'a pas de solution.
Donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

3- Factorisation d'un polynôme du second degré

Méthode

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x)$ tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, on peut procède comme suit :

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ n'a pas de racine. Donc P(x) n'est pas factorisable

•Si $\Delta = 0$ alors $P(x)$ admet un zéro x_0 tel que : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

La forme factorisée de P(x) est : $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_0)^2}$.

•Si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que :$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La forme factorisée de $P(x)$ est : $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Signe de Δ	Nombre de racines	Forme factorisée
$\Delta < 0$	P(x) n'a pas de racine $\mathbb{R}$	P(x) n'est pas factorisable
$\Delta = \mathbf{0}$	P(x) a un zéro $x_0 = -\frac{b}{2a}$	**P(x)=** $\boldsymbol{a(x - x_0)^2}$
$\Delta > 0$	P(x) a deux zéros distincts $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	**P(x)=** $\boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Exercice de fixation

Factorise chacun des polynômes $P(x)$, $R(x)$ et $T(x)$ suivants.

$P(x) = 3x^2 + 2x + 1$; $R(x) = 2x^2 - 4x + 2$; $T(x) = -x^2 - 3x + 4$

Solution

• $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$$

Δ étant négatif, alors $P(x)$ n'a pas de racine par conséquent $P(x)$ n'est pas factorisable

• $R(x) = 2x^2 - 4x + 2$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$, alors $R(x)$ admet une racine double $x_0 = -\frac{-4}{2\times2} = 1$, par conséquent la forme factorisée de $R(x)$ est : $R(x) = 2(x-1)^2$

• $T(x) = -x^2 - 3x + 4$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25$$

Δ étant positif $T(x)$ alors admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -4$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 1$ par conséquent la forme factorisée de $T(x)$ est : $T(x) = -(x+4)(x-1)$

4- Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

4-1 Signe d'un polynôme second degré

Méthode

Pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré $P(x)$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ on peut procède comme suit :

• On calcule le discriminant Δ ; ($\Delta = b^2 - 4ac$).

•on utilise l'un des tableaux de signe ci-dessous :

- si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ n'a pas de zéro.
  $P(x)$ **est toujours du signe de a.**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

- si $\Delta = 0$, alors P(x) admet un zéro x_0 tel que $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  $P(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ admet deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
(On suppose $x_1 < x_2$)
$P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des zéros et du signe de $-a$ (signe contraire de a) à l'intérieur des zéros.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

<u>Exercice de fixation</u>
Détermine le signe de chacun des polynômes suivants :
$$P(x) = x^2 - x + 3 = 0\ ;\ Q(x) = -x^2 + x + 2 = 0;\ R(x) = -9x^2 + 6x - 1 = 0$$

<u>Solution</u>
• $P(x) = x^2 - x + 3 = 0$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -8$$
Δ étant négatif, alors $P(x)$ n'a pas de zéro. $P(x)$ est du signe de a. ($a = 1$)
Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$P(x)$	$+$

Conclusion : pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$

• $Q(x) = -x^2 + x + 2$
$\Delta = (+1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$, alors $Q(x)$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$,
Tableau de signe de $Q(x)$:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Conclusion :
pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]2 + \infty[$, $Q(x) < 0$
pour tout $x \in]-1; 2[$, $Q(x) > 0$
pour tout $x \in \{-1; 2\}$, $Q(x) = 0$

- $R(x) = -9x^2 - 6x - 1$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-9) \times (-1) = 36 - 36 = 0$, alors $R(x)$ admet un zéro $x_0 = -\frac{-6}{2\times(-9)} = \frac{1}{3}$

Tableau de signe de $R(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$R(x)$		$-$	0	$-$	

Conclusion :

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$, $R(x) < 0$

Pour $x = \frac{1}{3}, R(x) = 0$

4-2 Inéquations du second degré dans ℝ.

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré tel que : $\mathrm{P(x) = ax^2 + bx + c}$ où $\mathrm{a} \neq 0$.

Toute inéquation de l'un des types suivants : $P(x) > 0$; $P(x) \geq 0$; $P(x) < 0$ ou $P(x) \leq 0$ est appelée inéquation du second degré dans ℝ.

Exemple

$-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ est une inéquation du second degré dans ℝ.

Méthode

Pour résoudre dans ℝ une inéquation du second degré du type $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ *ou* $ax^2 + bx + c > 0$ (où a $\neq 0$), on peut procéder comme suit :

• étudier le signe du polynôme du second degré $P(x)$ tel que :$P(x) = ax^2 + bx + c$;

•déterminer l'intervalle sur lequel $P(x)$ vérifie l'inégalité donnée;

• conclure.

Exercice de fixation

Résous dans ℝ les inéquations suivantes (I_1): $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ et (I_2): $-x^2 + x + 2 < 0$

Solution

•(I_1): $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$

Soit $P(x) = -x^2 + 10x - 25$

$\Delta = (10)^2 - 4 \times (-1) \times (-25) = 100 - 100 = 0$, alors $P(x)$admet un zéro $x_0 = -\frac{10}{2\times(-1)} = 5$

Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	

Conclusion : $S_R = \{5\}$

•(I_2): $-x^2 + x + 2 < 0$

Soit $R(x) = -x^2 + x + 2$

$\Delta = (+1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$, alors $R(x)$ admet deux zéros distinctes $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$,

Tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $S_{\mathbb{R}} = \ ]-\infty; -1[\cup]2 + \infty[$

5-Equations du type : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

Méthode

Pour résoudre l'équation du type $\frac{ax+d}{cx+d} = 0$, on peut procéder comme suit :
- Chercher la contrainte sur l'inconnue ;
- Résoudre l'équation $ax + b = 0$;
- Vérifier si la solution obtenue vérifie la contrainte sur l'inconnue :si c'est le cas, l'ensemble des solutions de $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ est la solution obtenue. Dans le cas contraire l'ensemble des solutions est l'ensemble vide

Exercice de fixation Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
(E_1) : $\frac{x-1}{2x-1} = 0$; (E 2) :$\frac{3x-9}{3-x} = 0$

Solution
(E_1) : $\frac{x-1}{2x-1} = 0$
Contrainte sur l'inconnue : $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.
• Pour $x \neq \frac{1}{2}$ on a :
• $\frac{x-1}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
-Comme $1 \neq \frac{1}{2}$. alors $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

(E_2) : $\frac{3x-9}{3-x} = 0$
• Contrainte sur l'inconnue : $3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
• : $\frac{3x-9}{3-x} = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
•Comme 3=3 alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

6-Inéquations du type : $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0}$ **ou** $\boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0,}$ on peut procéder comme suit :
- Chercher la contrainte sur l'inconnue ;
- Étudier le signe de la fraction rationnelle $R(x) = \boldsymbol{\frac{ax+b}{cx+d}}$;
- Déterminer l'intervalle sur lequel $\boldsymbol{R(x)}$ vérifie l'inégalité donnée ;
- Conclure.

Exercice de fixation
Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-1}{2x-1} \leq 0$

Solution
Soit $R(x) = \boldsymbol{\frac{x-1}{2x-1}}$
-Cherchons la contrainte
$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$
On a : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

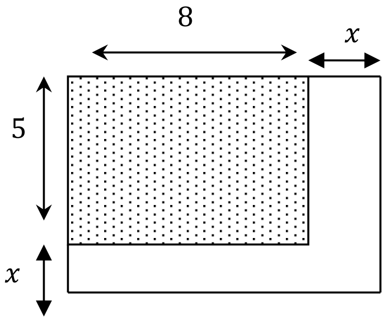
- Tableau de signe de $R(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$R(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Alors $S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{1}{2}; 1\right]$

C. SITUATION COMPLEXE

Une coopérative scolaire utilise un terrain rectangulaire dont la largeur et la longueur mesurent respectivement 5m et 8m pour produire des tomates. Pour augmenter la production, le responsable de la coopérative informe que les côtés du terrain doivent être augmentés chacun d'une longueur identique comme l'indique la figure ci-dessous pour avoir un terrain rectangulaire dont l'aire sera de 88m^2.
Des élèves de première A présent désirent connaitre le nombre de mètres à ajouter. Il sollicite ton aide.
Détermine le nombre de mètres à ajouter.



Corrigé

1) Justification de $x^2 + 13x - 48 = 0$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du grand rectangle

$\mathcal{A} = (x+8)(x+5)$

$\mathcal{A} = x^2 + 13x + 40$

Pour $\mathcal{A} = 88$; on a $x^2 + 13x + 40 = 88$

D'où $x^2 + 13x - 48 = 0$.

2) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times (1) \times (-48) = 361 = 19^2$$

$\Delta > 0$, l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-13-19}{2}$ et $x_2 = \frac{-13+19}{2}$.

$x_1 = -16$ et $x_2 = 3$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-16;\ 3\}$$

3) Nombre de mètres à ajouter

-16 et 3 sont les deux solutions de l'équation $x^2 + 13x - 48 = 0$

Or -16 est négatif donc le nombre de mètre à ajouter est 3

D-EXERCICES

1. EXECICES DE FIXATION :

Exercice 1

Pour chaque affirmation, il est proposé trois réponses dont une seule est exacte. Indique la réponse exacte par la lettre A, B ou C

Affirmations	A	B	C	Réponses
Le discriminant du polynôme $3x^2 - x + 2$ est	25	23	-23	
Les zéros du polynôme $-x^2 + 5x - 4$ sont	1 et 4	-1 et -4	1 et -4	
L'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$ a	aucune solution	une seule solution	deux solutions distinctes	

Corrigé

Affirmations	A	B	C	Réponses
Le discriminant du polynôme $3x^2 - x + 2$ est	25	23	-23	**C**
Les zéros du polynôme $-x^2 + 5x - 4$ sont	1 et 4	-1 et -4	1 et -4	**A**
L'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$ a	aucune solution	une seule solution	deux solutions distinctes	**C**

Exercice 2

En utilisant le discriminant factorise chacun des polynômes suivants :

$T(x) = -2x^2 + x + 10$; $V(x) = x^2 - 25$; $Y(x) = 3x^2 - x + 4$; $Z(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

Corrigé

▪ $T(x) = -2x^2 + x + 10$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-2) \times (10) = 81$$

$\Delta > 0$, donc $T(x)$.admet deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{-1-9}{-4} = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+9}{-4} = -2.$$

On a alors $\boldsymbol{T(x) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 2)}$

▪ $V(x) = x^2 - 25$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times (1) \times (-25) = 100$$

$\Delta > 0$, donc $V(x)$.admet deux zéros distincts :

$$x_1 = \frac{0-10}{2} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{0+10}{2} = 5.$$

On a alors $\boldsymbol{V(x) = (x + 5)(x - 5)}$

▪ $Y(x) = 3x^2 - x + 4$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (3) \times (4) = -47$$

$\Delta < 0$, donc $Y(x)$.n'admet pas de zéro :

$Y(x)$.n'est pas factorisable

▪ $Z(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (1) \times \left(\frac{9}{4}\right) = 0$

$\Delta = 0$, donc $Z(x)$.admet un zéro double : $x_0 = \frac{3}{2}$

On a alors $\boldsymbol{Z(x) = (x - \frac{3}{2})^2}$

2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

Recopie et complète le tableau ci-dessous

Polynômes	Discriminant	$P(x) = 0$	$P(x) > 0$	$P(x) \leq 0$
$P(x) = x^2 - x + 2$	Δ=	$S_R =$	$S_R =$	$S_R =$
$P(x) = -x^2 + 3x + 4$	Δ=	$S_R =$	$S_R =$	$S_R =$

Corrigé

Polynômes	Discriminant	$P(x) = 0$	$P(x) > 0$	$P(x) \leq 0$
$P(x) = x^2 - x + 2$	Δ= -7	$S_R = \emptyset$	$S_R =$ IR	$S_R = \emptyset$
$P(x) = -x^2 + 3x + 4$	Δ= 25	$S_R = \{-1; 4\}$	$S_R =$]-1 ; 4[	$S_R =$]-∞$; -1] \cup [4; +\infty$

Exercice 4

1) Écris $\frac{-x+3}{2x-3} - 2$ sous la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$
2) Résous dans ℝ l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$
3) Résous dans ℝ l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$

Corrigé

1) $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 = \frac{-x+3-2(2x-3)}{2x-3} = \frac{-5x+9}{2x-3}$

2) Résolution dans ℝ de l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$

$\frac{-x+3}{2x-3} = 2$ équivaut à $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 = 0$

Ce qui revient à résoudre dans ℝ l'équation $\frac{-5x+9}{2x-3} = 0$

La contrainte sur l'inconnue est $x \neq \frac{3}{2}$

$-5x + 9 = 0$ équivaut à $x = \frac{9}{5}$

$\frac{9}{5} \neq \frac{3}{2}$, d'où $S_R = \left\{\frac{9}{5}\right\}$

Donc l'ensemble de solutions dans ℝ de l'équation $\frac{-x+3}{2x-3} = 2$ est : $\boldsymbol{S_R = \left\{\frac{9}{5}\right\}}$

3) Résolution dans ℝ de l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$

$\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$ équivaut à $\frac{-x+3}{2x-3} - 2 \geq 0$

Ce qui revient à résoudre dans ℝ l'inéquation $\frac{-5x+9}{2x-3} \geq 0$

La contrainte sur l'inconnue est $x \neq \frac{3}{2}$

Tableau de signe de $\frac{-5x+9}{2x-3}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$ $+\infty$
$-5x+9$	+		+ 0 -
$2x-3$	-	0	+ +
$\frac{-5x+9}{2x-3}$	-	■	+ 0 -

L'ensemble de solutions dans ℝ de l'inéquation $\frac{-5x+9}{2x-3} \geq 0$ est $S_R =]\frac{3}{2};\frac{9}{5}]$

Donc l'ensemble de solutions dans ℝ de l'inéquation $\frac{-x+3}{2x-3} \geq 2$ est $\boldsymbol{S_R =]\frac{3}{2};\frac{9}{5}]}$

3. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercie 5

On donne $P(x) = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

1) Calcule $P(1)$. Déduis-en que 1 est un zéro de P(x)
2) Justifie que $P(x) = (x-1)(-2x^2 - 3x - 1)$
3) On pose $Q(x) = -2x^2 - 3x - 1$
   Détermine les zéros de Q(x)
4)) Résous l'équation P(x) = 0
5) -a) Dresse le tableau de signe de $P(x)$.
   b) Déduis-en la résolution de l'inéquation P(x) ≤ 0.

Corrigé

1) $P(1) = -2 \times (1)^3 - (1)^2 + 2 \times (1) + 1 = 0$. Donc 1 est un zéro de P(x)
2) $(x-1)(-2x^2 - 3x - 1) = -2x^3 - 3x^2 - x + 2x^2 + 3x + 1$
   $= -2x^3 - x^2 + 2x + 1$

D'où $P(x) = (x-1)(-2x^2 - 3x - 1)$

3) Détermination des zéros de $Q(x)$.

$$Q(x) = -2x^2 - 3x - 1$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1$

$\Delta > 0$, donc $Q(x)$.admet deux zéros distincts :

$x_1 = \frac{3-1}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+1}{-4} = -1$.

4) Résolution de l'équation P(x) = 0
   P(x) = 0 équivaut à $(x-1)(-2x^2 - 3x - 1) = 0$

Ceci équivaut à $x - 1 = 0$ ou $-2x^2 - 3x - 1 = 0$

D'où $S_{IR} = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1\right\}$

5) a)-Tableau de signe de $P(x)$.

$$P(x) = (x-1)\,Q(x).$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
$Q(x)$.		-	0	+	0	-		-	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

b) Résolution de l'inéquation P(x) ≤ 0.

D'après le tableau de signe de $P(x)$, l'inéquation P(x) ≤ 0 a pour ensemble de solution

$S_{IR} = [-1; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$