SECONDAIRE
Tle C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 10 heures **Code :**

Leçon 1 : Limites et continuité d'une fonction

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de Terminale s'exercent à la photographie au sein du club photo du lycée. On les informe qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».

Un élève affirme alors que : $P = 10 - \frac{50}{5+r}$. Ce qui n'est pas de l'avis des autres.

Ensemble ils décident de vérifier cette formule et de faire des calculs pour déterminer la distance de mise au point à choisir quand l'objet s'éloigne.

B. CONTENU DE LA LEÇON

1. Limite d'une fonction composée

Propriété

Soit f et g deux fonctions numériques. a, b et ℓ sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

Exercice de fixation

1 Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \sqrt{4 + \frac{2}{x^2+1}}$.

2. Calcule la limite en 0 de la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

Solution

1. $h(x) = g \circ f(x)$ *avec* $f(x) = 4 + \frac{2}{x^2+1}$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$

Nous avons: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{2}{x^2+1}\right) = 4$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$

et $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x} = 2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 2$.

2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = u \circ v(x)$ où $v(x) = 2x$ *et* $u(x) = 2 \times \frac{\sin x}{x}$

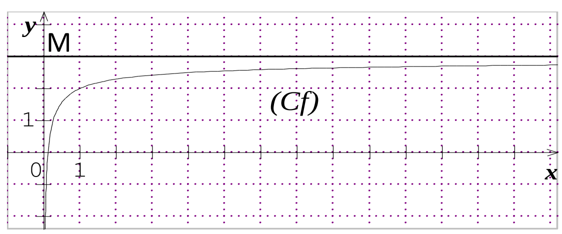
On a : $\lim\limits_{x\to0} v(x) = \lim\limits_{x\to0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} u(x) = \lim\limits_{x\to0} 2 \times \frac{\sin x}{x} = 2$

donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$.

2. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

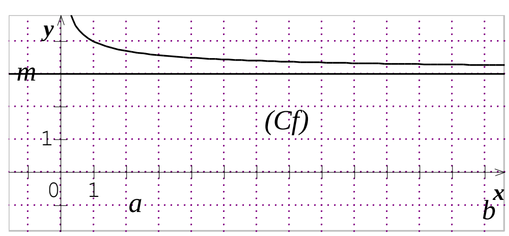
Propriété 1

a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.
Si f est croissante et majorée par un nombre réel M sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b.
De plus $\ell \leq$ M.



Propriété 2

a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f une fonction numérique.
Si f est décroissante et minorée par un nombre réel m sur l'intervalle $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b.
De plus $\ell \geq$ m.



Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Sachant que : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, on a : $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

Justifie que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et donne un encadrement de ℓ.

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$,

$\forall x \in [1\,;+\infty[$, *on a :* $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[$, $-\frac{1}{x} \leq 0$ *donc* $f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1) \leq 1 + f(1)$.
La fonction f *est croissante sur* $[1\,;+\infty[$ *et majorée par* $1 + f(1)$ *donc* f *admet une limite finie* ℓ *en* $+\infty$. *D'où :* $f(1) \leq \ell \leq 1 + f(1)$.

3. Branches paraboliques

Définition

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,I,J)

- On dit que (C) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction celle de (OI)** lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,
- On dit que (C) admet en $+\infty$ **une branche parabolique de direction celle de (OJ)** lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(\text{ou} -\infty)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(\text{ou} -\infty)$,

Remarque : On définit de manière analogue les branches paraboliques en $-\infty$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).
Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

Solution

f est définie sur [-1;1[U]1;+∞[. On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.
D'où: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$. On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 0.$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$.On conclut que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

4. Continuité sur un intervalle

4.1-Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout élément de I.

Exemple

Les fonctions polynôme, rationnelle, sinus, cosinus, racine carrée, puissance, valeur absolue et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs.

4.2-Prolongement par continuité

Propriété et définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f.
Si f admet une limite finie ℓ en a , alors on dit que f est prolongeable par continuité en a et la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \text{Df}, g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$

est continue en a et est appelée **le prolongement par continuité de f en a**.

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

La fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$

est le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice de fixation

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$.

Démontre que f admet en 9 un prolongement par continuité φ, et définit le.

2. Soit g la fonction définie sur IR \ $\{-1\ ;0\ ;1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$

g est – elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifie ta réponse.

Solution

1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x - 5 \ \geq \ 0$ *et* $\sqrt{x-5} - 2 \neq 0 \}$

$x - 5 \ \geq \ 0 \Leftrightarrow x \ \geq \ 5$

$\sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow \ x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$

Donc : $D_f = [5 ;9[\cup]9 ;+\infty[$.

$\forall x \in D_f,\ f(x) = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}\ -2)(\sqrt{x-5}+2)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \sqrt{x-5} + 2$

On a : $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9}\left(\sqrt{x-5} + 2\right) = 4$

Ainsi, $9 \notin D_f$ *et* f *admet une limite finie en 9. Donc* f *est prolongeable par continuité en 9.*

La fonction φ est définie sur [5 ; +∞[par : φ(9) = 4 et $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$ *est le prolongement par continuité de f en 9.*

<u>*Remarque*</u>*: φ est définie sur [5 ; +∞[par:* $\varphi(x) = \sqrt{x-5} + 2$ *.*

2.

$Pour\ tout x \in]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;\ 0[\,; g(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x} = 1$

$On\ a\ donc \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = 1$

$Pour\ tout x \in]0\,;1[\cup]1\,;\ +\infty[\,; g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$

$On\ a\ donc \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-1} = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ $, ainsi\ \ g\ n'admet\ pas\ de\ limite\ en\ 0, donc\ g\ n'est\ pas\ prolongeable$
$par\ continuit$é $en\ 0.$

4.3- Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1

L'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle ou un singleton.

Exercice de fixation

Détermine l'image de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par la fonction cosinus.

Solution

La fonction cosinus est continue sur $]-\pi;\pi]$

Or pour tout nombre réel x appartenant à $]-\pi;\pi]$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

De plus $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$.

Donc l'image de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par la fonction cosinus est $[-1;1]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux nombres réels tels
que a $< b$.

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$f([a;b]) = [f(a);f(b)]$	$f([a;b]) = [f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$f([a;b[) = [f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)[$	$f([a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$f(]a;b]) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x);f(b)\right]$	$f(]a;b]) = \left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\right[$
$]a;b[$	$f(]a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)[$	$f(]a;b[) =]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$f([a;+\infty[) = [f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f([a;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)]$
$]-\infty;+\infty[$	$f(]-\infty;+\infty[)$ $=]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(]-\infty;+\infty[)$ $=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercice de fixation

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur les intervalles]-∞;0[et]0; +∞[.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$	‖	$-$

$f(x)$	-2 ↗ 5 ↘ 1		$+\infty$ ↘ 1

Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : *]-∞ ;-1],]0 ;+∞[et [-1 ;0[.*

Solution

- f est continue et strictement croissante sur]-∞ ;-1] donc :

  f(]-∞ ;-1]) = $\left]\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x); f(-1)\right]$ =]-2 ; 5].
- f est continue et strictement décroissante sur]0 ;+∞[donc :

  f(]0 ;+∞[) = $\left]\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x); \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\right[$ =]1 ;+∞[.
- f est continue et strictement décroissante sur [-1 ;0[donc :

  f([-1 ;0[) = $\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) ; f(-1)\right]$=]1 ;5].

4.4-Opérations sur les fonctions continues

Propriété 1

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors :

- ✓ les fonctions $f+g$, fg , f^n ($n \in \mathbb{N}$)et $|\, f\, |$ sont continues sur I.
- ✓ si g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- ✓ si f est positive sur I alors fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exercice de fixation

Soit g et h deux fonctions définies de ℝ vers ℝ par : $g(x) = x^3 + sinx$ et $h(x) = \sqrt{x^2-1}$

1) Justifie que g est continue sur ℝ.

2) Justifie que h est continue sur $]-\infty; -1]$.

Solution

1) g est la somme des fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto sinx$ qui sont continues sur ℝ. Donc g est continue sur ℝ.

2) La fonction $x \longmapsto x^2 - 1$ est continue et positive sur $]-\infty; -1]$.
Donc h est continue sur $]-\infty; -1]$.

Propriété 2

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur l'ensemble f(I), alors gof est continue sur I.

Exercice de fixation

Soit g et f deux fonctions définies de ℝ vers ℝ par : $g(x) = \frac{1+x}{2+x}$ et $f(x) = cosx$

Justifie que gof est continue sur ℝ.

Solution
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.
La fonction g est continue sur $[-1;1]$
Donc la fonction gof est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

5.1-Propriétés

Propriété 1
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de I sur l'intervalle f(I).
- la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone sur f(I).
- f^{-1} a le même sens de variation que f.

Remarque : Les courbes représentatives de $f\ et\ de\ f^{-1}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Soit f: $[0;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Démontre que f est une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. Déduis en le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

Solution

1.D_f = [0 ; +∞[.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1.$
f est dérivable sur $[0;\ +\infty[$ *et pour tout* $x \in [0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x(1+x^2)-2x(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
Pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$ *car* $\forall x \in]0;\ +\infty[$,$2x > 0$ *et* $(1+x^2)^2 > 0$.
f est donc continue et strictement croissante sur [0 ;+∞[; par suite f est une bijection de $[0;\ +\infty[$ *sur f(*$[0;\ +\infty[$ *) = [0;1[.*

2. f^{-1} *est donc définie sur [0 ;1[.* f^{-1} *a le même sens de variation que f, donc* f^{-1} *est strictement croissante sur [0;1[.*

Exercice 2
Soit la fonction g : [1;3] → [0;4]

$$x \longmapsto -x^2 + 2x + 3$$

1. Démontre que g est une bijection.
2. Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque g^{-1} de g.

Solution

1. *g est dérivable sur [1;3].* $\forall x \in [1\,;3], g'(x) = -2x + 2.$

x	1 3
$-2x+2$	0 -

$\forall x \in]1;3], g'(x) < 0$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur [1;3] et g([1;3]) = [g(3);g(1)] = [0;4]

donc g est une bijection.

2. Soit y ∈ [0 ;4]. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;3]$, *on a les équivalences suivantes :*

$g(x) = y \iff (x-1)^2 - 4 + y = 0$

$\iff x = 1 + \sqrt{4-y}$ *, car pour* $y \in [0\,;4]$, $1 + \sqrt{4-y} \in [1\,;3]$

D'où la bijection réciproque g^{-1} *est définie de* $[0\,;4\,]$ *sur* $[1\,;3]$ *par :* $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4-x}$.

Propriété 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $\boldsymbol{f(x) = m}$
admet au moins une solution comprise entre a et b.

Corollaire 1

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
Pour tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $\boldsymbol{f(x) = m}$
admet une unique solution comprise entre a et b.

Exercice de fixation

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur [-1;+∞[

1. Justifie que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution dans [-1;+∞[.

x	-1 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	5 ↘ $-\infty$

2. L'équation : $f(x) = 13$ admet-elle une solution dans [-1;+∞[? Justifie ta réponse.

Solution

1.f est continue et strictement décroissante sur [-1;+∞[, $f([-1;+\infty[) =]-\infty\,;5]$ *et -10 ∈]-∞ ;5] donc l'équation :* $f(x) = -10$ *admet une solution unique dans [-1 ;+∞[.*
2. 13 ∉]-∞ ;5] donc l'équation : $f(x) = 13$ *n'admet pas de solution dans [-1 ;+∞[.*

Corollaire 2

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation : $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une solution unique dans $]a\,;b[$.

Exercice de fixation

Démontre que l'équation : $x \in]0\,;1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α.

Solution

Soit f la fonction définie sur [0;1] par: $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$*. f est dérivable sur [0;1].*
Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 6x^2 + 3$. Par suite, pour tout x ∈ [0;1], $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur [0;1].
$f(0) = -1$ *et* $f(1) = 4$.
f est continue et strictement croissante sur [0;1] et $f(0) \times f(1) < 0$,

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0 ;1[.

5.2. Valeur approchée de la solution α d'une équation

Méthodes pratiques de détermination d'une valeur approchée de la solution α d'une équation

L'équation : $x \in]0\,;1[\,, 2x^3 + 3x - 1 = \mathbf{0}$ admet une unique solution α.

Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Posons $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

- **Méthode 1** : Méthode de balayage

Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-1} près, on effectue un balayage de [0;1] avec un pas égal à 0,1 jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires.

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
$f(x)$	*-1*	*-0,7*	*-0,38*	*-0,05*	*0,3*

On a : $f(0{,}3) \times f(0{,}4) < 0$ *donc 0,3 < α < 0,4.*

Une valeur approchée de α à 10^{-1} *près est 0,3.*

- **Méthode 2** : Méthode de dichotomie

f est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Il existe α élément de $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il s'agit de trouver un encadrement de α d'amplitude réduite . On procède comme suit :

- ✓ On calcule : $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$
- ✓ Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de signes contraires alors $\alpha \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$
  Si $f(a)$ et $f(\frac{a+b}{2})$ sont de même signe alors $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$
- ✓ On répète le même processus dans le nouvel intervalle trouvé auquel appartient α jusqu'à trouver un intervalle d'amplitude demandé.
- ✓

Appliquée à notre exercice, cette méthode donne ce qui suit :

- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0{,}5) = 0{,}75$, donc $f(0)$ et $f(0{,}5)$ sont de signe contraires, par conséquent $\alpha \in [0; 0{,}5]$
- ✓ $f(0) = -1$ et $f(0{,}25) = -0.22$, donc $f(0)$ et $f(0{,}25)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [0{,}25 ; 0{,}5]$
- ✓ $f(0{,}25) = -0.22$ et $f(0{,}375) = 0{,}23$ donc $f(0{,}25)$ et $f(0{,}375)$ sont de signes contraires par conséquent $\alpha \in [0{,}25 ; 0{,}375]$
- ✓ $f(0{,}25) = -0.22$ et $f(0{,}3125) = -0.0014$ donc $f(0{,}25)$ et $f(0{,}3125)$ sont de même signe, par conséquent $\alpha \in [0{,}3125 ; 0{,}375]$
  En finalement à l'ordre 1 on conclue que $\alpha \in [0{,}3 ; 0{,}4]$ d'où une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.

6. Fonction racine n$^{\text{ième}}$, fonction puissance d'exposant rationnel

6.1-Fonction racine n$^{\text{ième}}$

Définition

Soit n un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.
La fonction racine n$^{\text{ième}}$ est la bijection réciproque de la fonction

$$f : [0;\ +\infty[\longrightarrow [0;\ +\infty[\quad x \longmapsto x^n .$$

La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif ou nul x est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

Conséquences :

$$\begin{cases} x \in \mathrm{IR}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathrm{IR}^+ \\ x = y^n \end{cases}$$

$\forall x \in \mathrm{IR}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ ou $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Exemples

$x \in IR^+, x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$; $x \in IR^+, x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7}$.

$\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{120^5} = 120$.

6.2-Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

Définition

Soit p un nombre entier relatif non nul et q un nombre entier naturel tel que $q \geq 2$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on pose : $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemple

Propriétés

Pour tous nombres rationnels r et r' non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs a et b on a :

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
- $\dfrac{1}{a^r} = a^{-r}$
- $\dfrac{a^{r'}}{a^r} = a^{r'-r} = \dfrac{1}{a^{r-r'}}$
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$
- $a^r \times b^r = (ab)^r$
- $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

Exercice de fixation

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^{α} où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\dfrac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$; $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$.
2. Justifie que : $\dfrac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.
3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

Solution

1. On a : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$; $\dfrac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}} = \dfrac{a^3}{a^{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^3}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{3-\frac{1}{5}} = a^{\frac{14}{5}}$;

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} = (a)^{\frac{1}{3}} \times (a)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}$.

2. On a : $\dfrac{4\times\sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}}=\dfrac{2^2\times 2^{\frac{3}{10}}}{\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{2+\frac{3}{10}}}{2^{\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{23}{10}}}{2^{\frac{4}{5}}}=2^{\frac{23}{10}-\frac{4}{5}}=2^{\frac{15}{10}}=2^{\frac{3}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

3. $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}}\times\sqrt{\sqrt[3]{ab^5}}=\left(\left(a^5b\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\left(ab^5\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}b^{5\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$.

$=a^{5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}=ab$

C . SITUATIONS COMPLEXES

Situation 1

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t)=\frac{200}{t}+10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.

Solution

Dans cet exercice, les élèves cherchent à déterminer la température après une longue période de refroidissement.

Pour déterminer la température de ce corps après une longue période de refroidissement

- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction donnée en $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

La température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t est $f(t)=\frac{200}{t}+10$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(f(t)\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{200}{t}+10\right)=10$.

La température de ce corps après une longue période de refroidissement est de 10°C.

Situation 2

Les élèves du club photo de ton établissement s'exercent à la photographie. Ils savent qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

Ils savent également qu'en optique, pour que la netteté s'étende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance P moyenne harmonique des distances a et r

(les distances sont exprimées en mètres)

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ». Ils te sollicitent à cet effet.

En t'appuyant sur tes connaissances, détermine la distance de mise au point à choisir.

Solution

Dans cet exercice, les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l’infini ».
Pour déterminer la distance de mise au point à choisir

- J’exprime P en fonction de a et r .
- J’utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction correspondante en $+\infty$
- J’interprète le résultat trouvé.

P est la moyenne harmonique des distances a et r donc $\frac{2}{P} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$ c’est-à-dire $P = \frac{2ar}{a+r}$.

Pour que la netteté s'étende de «5m à l’infini », la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{10\,x}{5+x}$ pour x tendant vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} P = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{10\,x}{5+x} \right) = 10$.

La distance de mise au point à choisir pour que la netteté s'étende de «5m à l’infini » est de 10 mètres.

D. EXERCICES RÉSOLUS

Le plan est muni d’un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1

La fonction f est continue sur]-∞;0[et sur]0; +∞[et a pour tableau de variation le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	
$f(x)$	-2	↗	5	↘ 1	‖	$+\infty$ ↘	1

En utilisant ce tableau, donner les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f\left(-2 + \frac{1}{x}\right) \; ; \; \lim_{x \to -\infty} f(x^2) \; ; \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(\frac{-1}{x}\right) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{2x - 1}{x^2 + x}\right).$$

SOLUTION

On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{1}{x}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-5$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-2+\frac{1}{x}\right)=5.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2)=1.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{-1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f\left(\frac{-1}{x}\right) = -2$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)=$ $+\infty.$

<u>Exercice</u> **2**

Calcule les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$.

SOLUTION

Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=-1.$$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$

On rappelle que $\forall\, T\in\mathbb{R}, -1\le\sin(T)\le 1$. En particulier $\forall\, x\in\mathbb{R}, -1\le\sin(x^5)\le 1$.

Pour $x>0$, $\frac{-1}{x}\le\frac{\sin(x^5)}{x}\le\frac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)=0.$

<u>Exercice 3</u>

Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. Soit n un entier relatif.
   Justifie que la fonction k est continue en n.
2. Justifie que la fonction k est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x .

1. n étant un entier relatif, $k(n)=E(n)+(n-E(n))^2=n-0=n.$

Calculons la limite de k à gauche en n.

Pour $n-1\le x<n$, $E(x)=n-1$ donc $k(x)=n-1+(x-n+1)^2.$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ <}} k(x) = n - 1 + (n - n + 1)^2 = n$

Calculons la limite de k à droite en n.

Pour $n \leq x < n + 1$, $E(x) = n$ donc $k(x) = n + (x - n)^2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} k(x) = n + (n - n)^2 = n.$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ <}} k(x) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ >}} k(x) = k(n)$, donc la fonction k est continue en n.

Exercice 4

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

1. Calcule la limite de f en + ∞ puis interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.
3. Etudie la position de (C_f) par rapport à (D).

Solution

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la représentation graphique (C_f) de f en + ∞.

2. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x + \frac{1}{2}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - x)(\sqrt{x^2+x+1} + x)}{\sqrt{x^2+x+1} - x} + \frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1} - x} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right)} + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1} + \frac{1}{2}$$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

Donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative (C_f) de f en - ∞.

3. Etudions la position de (C_f) par rapport à (D).

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et une équation de (D) est $y = -2x - \frac{1}{2}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x + \frac{1}{2})^2$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > \left|x + \frac{1}{2}\right|$ c'est-à-dire :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > x + \frac{1}{2}$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} > -2x - \frac{1}{2}$.

Par suite $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) > -2x - \frac{1}{2}$ donc (C_f) est au-dessus de la droite (D).

Exercice 5

Partie A . g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en -∞ et en +∞.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}6 < \alpha <$ 1,7. 4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en +∞ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontre que : $\forall\, x \in]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

3. Trace (T) et (C).

Solution

Partie A *Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

2. *g est dérivable sur IR. $\forall x \in IR, g'(x) = 6x^2 - 6x$.*

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$.

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]0; 1[, g'(x) < 0$

On en déduit que : g est strictement croissante sur] -∞ ; 0] et sur [1;+∞ [, g est strictement décroissante sur [0;1]

Tableau de variation de g.

x	-∞		0		1		+∞
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{-1}$	$\searrow$	$\boxed{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. - La fonction g est dérivable sur] -∞ ; 1] , et g' s'annule en 0.
   Par ailleurs, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$
   Par suite $g(0)$ est le maximum de g sur] -∞ ; 1].
   D'où : $\forall x \in$] -∞ ;1], $g(x) \leq g(0)$ et comme $g(0) < 0$, finalement, $\forall x \in$] -∞ ;1], $g(x) < 0$.
   - La fonction g est continue et strictement croissante sur [1 ;+∞[; g([1;+∞[) = [-2;+∞[,
   Or 0 ∈ [-2;+∞[, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans [1;+∞[.
   On conclut : l'équation $x \in IR, g(x) = 0$ admet une solution unique α.
   1,6 et 1,7 appartiennent à [1;+∞[; $g(1,6) \approx -0,49$ et $g(1,7) \approx 0,16$;
   $g(1,6) \times g(1,7) < 0$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

4. –Il a été démontré à la question 3) que $\forall x \in$] -∞ ;1], $g(x) < 0$.
- La fonction g est continue et strictement croissante sur [1; α [et sur] α ;+∞[, d'où :
$g([1; \alpha[) = [-2; 0[$ et $g(]\alpha; +\infty[) =]0; +\infty[$ donc :
$\forall x \in [1; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.
On conclut :
$\forall x \in]-\infty;\alpha[, (x) < 0$ $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1. **Limite en -1** :

Pour tout $x > -1$, $\quad f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3} = \dfrac{1}{1+x^3}(1-x)$

pour $x > -1$, *on a* $x^3 > -1$, *soit* $x^3 + 1 > 0$, *par suite* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{1}{1+x^3} = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x \to -1}(1-x) = 2$ *alors* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

$*$ **Limite en $+\infty$**

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur] -1; +∞ [,

$\forall x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) $\forall x \in]-1; +\infty[, (1+x^3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ déterminé à la fin de *la partie A , par suite :*

$\forall x \in]-1\,;\,\alpha[\,, f'(x) < 0\ \ ;\ \forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, f'(x) > 0\ \ et\ f'(\alpha) = 0.$

On en déduit que f est strictement décroissante sur] -1;α] et strictement croissante sur [α ;+∞[.

Tableau de variation de f,

X	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$+\infty$	$f(\alpha)$		0

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = -1\ ;\ f(0) = 1.$

Ainsi une équation de la tangente (T) est : $y = -x + 1.$

d) Pour tout $x > -1$, $f(x) - (-x+1) = \frac{x^2-x}{1+x^3} = \frac{x(x-1)}{1+x^3}$

$\forall x \in]-1; +\infty[, 1 + x^3 > 0$ *donc le signe de* $f(x) - (-x+1)$ *est celui de* $x(x-1)$.

$f(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = 1.$

$\forall x \in]-1\,;\,0[\, \cup\,]1;+\infty[, f(x) - (-x+1) > 0$ *et* $\forall x \in]0;1[, f(x) - (-x+1) < 0$

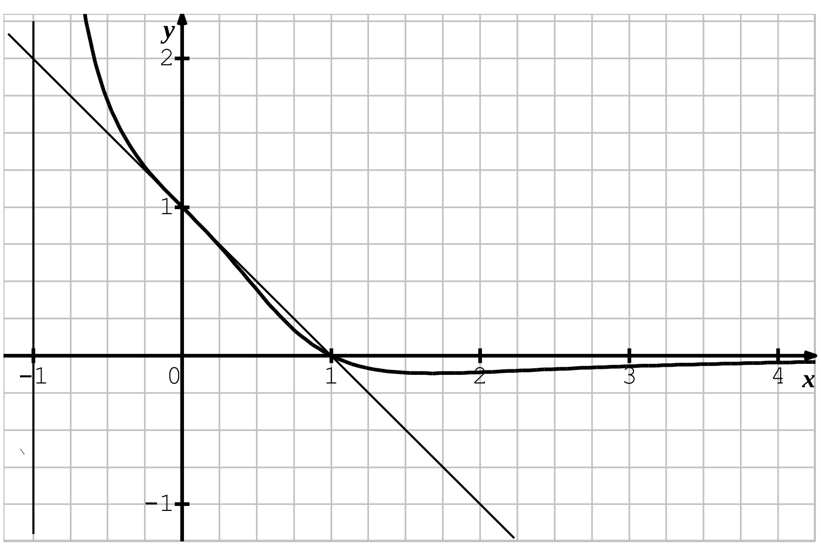
<u>On en déduit que</u> :

(C) est au-dessus de (T) sur] -1 ; 0[U]1;+∞ [,

(C) est au-dessous de (T) sur]0 ;1[

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

3. Représentation graphique de (T) et (C).



E. EXERCICES

I – EXERCICES DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + x - 1$;

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$; d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$; f) $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$;

g) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$; h) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$.

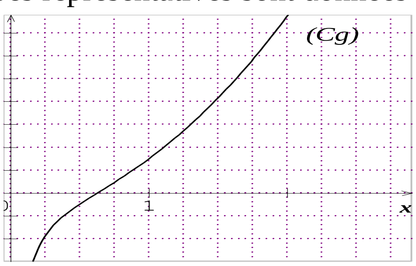
Exercice 2

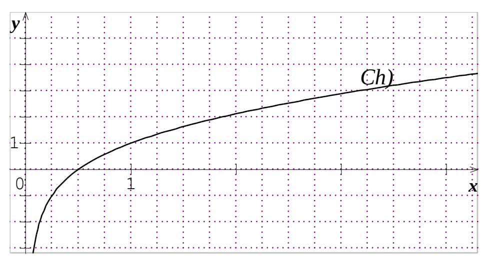
Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par : $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

$$\text{Démontre que la droite d'equation } y = 2x - \frac{1}{4} \text{ est une asymptote oblique à } (C_f) \text{ en } +\infty$$

Exercice 3

Soit g et h les fonctions définies sur]0 ;+∞[par : $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x}$ et $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$, dont les courbes représentatives sont données ci - dessous :





Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats

Exercice 4

On considère les fonctions f et g de IR vers IR définies par :

$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1} - 3x^2$.

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g.

1. Démontre que (C_f) admet en + ∞ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2. Calcule les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et interpréte graphiquement les résultats.

Exercice 5

Etudie la nature de la branche parabolique à la courbe représentative (C_f) de f en$+\infty$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$; b) $f(x) = \frac{2}{x+1} - \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x}$; d) $f(x) = \sqrt{x^3+8}$.

Exercice 6

Etudie la limite de f en a dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$; $a = 0$; b) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $a = 0$;

c) $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$; $a = \frac{\pi}{2}$; d) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, $a = 0$;

e) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, $a = 0$.

Exercice 7

f est une fonction de IR vers IR. Dans chacun des cas suivants, démontre que f admet en a un prolongement par continuité et définis ce prolongement.

a)$f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2}$, $a = 9$; b)$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $a = 0$; c)$f(x) = \frac{x^2-4}{|x+1|-1}$, a= -2

II – EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 8

Soit P la fonction définie et dérivable sur I; R dont le tableau de variation est le suivant :

x	-∞		-2		2		+∞
$P'(x)$		-	0	+	0	-	
$P(x)$	-5 ↘		-8	↗	3	↘	-4

1. Détermine le nombre de solutions de l'équation : $x \in$ IR, $P(x) = 0$. Justifie.
2. La courbe représentative (C) de P présente-t-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

Exercice 9

1. Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $x^4 - x^2 + 1 = 3$ admet une solution unique α dans]1;2[.
   Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. Démontre que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans]0;1[.
   Donne une valeur approchée de α à 10^{-1}près.

III – EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $3 < \alpha < 4$.
b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Trace (C_f).

Exercice 11

Soit f:] -∞ ;- $\frac{1}{2}$ [$\rightarrow$] $\frac{1}{2}$;+∞ [

$x \longmapsto \frac{x-3}{2x+1}$

(C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
1. Démontre que f est une bijection et détermine sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Trace la représentation graphique de f, puis déduis en celle de f^{-1}.

Exercice 12

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + 2x - 2$.
1. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) démontre : $0,77 < \alpha < 0,78$.

2. Démontre que :
$\forall\, x \in$] -∞ ; α [, $g(x) < 0$,
$\forall\, x \in$] α; +∞ [$g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur] -∞; 0 [∪] 0;+∞ [par :$f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2 cm.
1. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position de (C) par rapport à(D).
3.a) Démontre que :
$\forall\, x \in$IR*, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
b) Dresse son tableau de variation.
c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Trace (T), (D) et (C).

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur I; R\{-1 ;1} par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, de courbe représentative (C_f).
1. Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
a)Etudie le sens de variation de g et
et calcule ses limites en + ∞ et en - ∞.
b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur I; R

une unique solution notée α.

c) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

d) Déduis en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a)Détermine les limites de f en + ∞ et en - ∞.

b) Détermine les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.

Interprète graphiquement les résultats obtenus

c)Montre que pour tout $x \in$I; R\{-1;1},

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

d) Déduis en les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a)Détermine les nombres réels a, b , c et d tels que pour tout $x \in$I; R\{-1 ;1},

$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.

b) Déduis en que $(C_f$) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 2$.

c) Etudie la position relative de $(C_f$) et (D).

d) Montre que les abscisses des points B et B' où (C_f) admet une tangente parallèle à (D) sont -2+ $\sqrt{3}$ et -2 - $\sqrt{3}$

4.Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.

5. Détermine les points d'intersection de $(C_f$) avec la droite (OI).

6. Trace $(C_f$) et la tangente (T).