MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

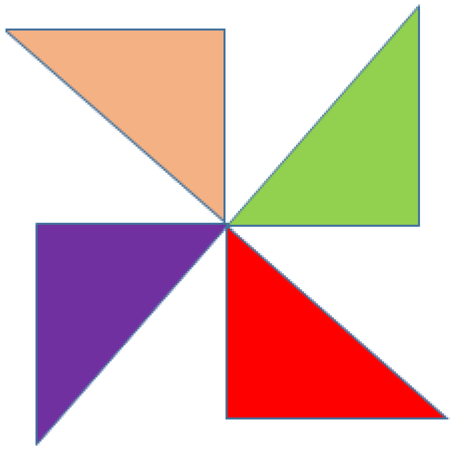
Durée :10 heures **Code :**

COMPETENCE 3	**Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
THEME 1	**Géométrie du plan**

Leçon 14 : Rotation

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

A la rentrée, les élèves d'une classe de 2nde C découvrent la tableau ci-dessous dans leur classe. Il est écrit sous la figure la mention suivante : « Ma production est faite par vos camarades à partir des constructions basées sur la notion de rotation ». Impressionnés, les élèves veulent reproduire la figure à partir de l'un des triangles. Pour cela, ils décident de s'approprier les définitions et propriétés relatives à la rotation et de les appliquer pour réaliser différentes figures qui s'y prêtent.



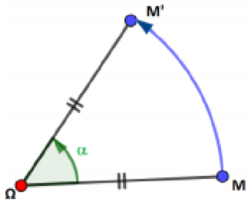
B- RESUME DE COURS

1. Rotation

1-1. Définition

Soit O un point du plan orienté et α un nombre réel appartenant à $]-\pi\ ;\ \pi]$. On appelle rotation de centre O et d'angle orienté de mesure principale α, l'application du plan (dans lui-même) qui, à chaque point M associé le point M' du plan tel que :

- $si\ M \neq O\ alors\ OM = OM' et\ Mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\ ;\overrightarrow{OM'}}\right) = \alpha$
- $si\ M = O, alors\ M' = O$



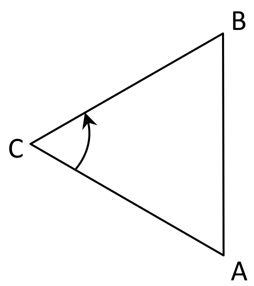
Le point O et α sont respectivement le centre et la mesure (principale) de l'angle de la rotation appelés les éléments caractéristiques de cette rotation.

M' est l'image de M par la rotation.

Notation

- La rotation est notée : $r_{(O;\,\alpha)}$ $ou\ r$ s'il n'y a pas d'ambiguité
- $M' = r_{(O;\,\alpha)}(M)\ \ ou\ \ M' = r(M)\ \ \ (s'il\ n'y\ a\ pas\ d'ambiguité)$

Exemple : ABC est un triangle équilatéral de sens direct.



On a : CA = CB et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Donc on peut dire que B est l'image de A par la rotation de centre C et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$. On écrit : $B=r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(A)$.

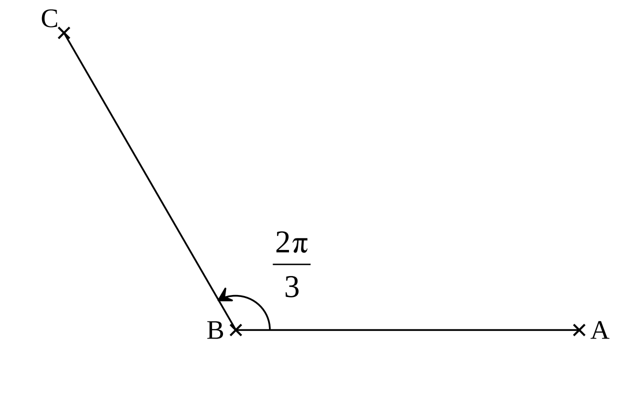
Cas particuliers

- Une rotation d'angle π ou demi-tour est une symétrie centrale.
- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour direct.
- La rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour indirect.

Remarque : Si r est une rotation de centre O tel que r(A) = B. Alors la relation OA = OB montre que le centre O est un point de la médiatrice du segment [AB].

1.2 <u>Exemple de construction de l'image d'un point par une rotation</u>

Sur la figure ci-dessous, A et B sont deux points distincts du plan orienté. Le point C est l'image A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



BA = BC et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

1-2. Points invariants

Propriété

Toute rotation d'angle non nul admet un unique point invariant : son centre.

<u>Exercice de fixation</u>

K est un point du plan. On considère la rotation r de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

quelle est l'image de K par la rotation r.

<u>Solution</u>

K est le centre de la rotation r, donc $r(K)=K$.

<u>Remarque</u>

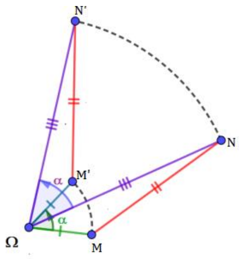
Si l'angle de la rotation est nul, alors chaque point du plan est invariant.

1-3. Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α.

Si M'et N' sont les images respectives de deux points distincts M et N par r alors

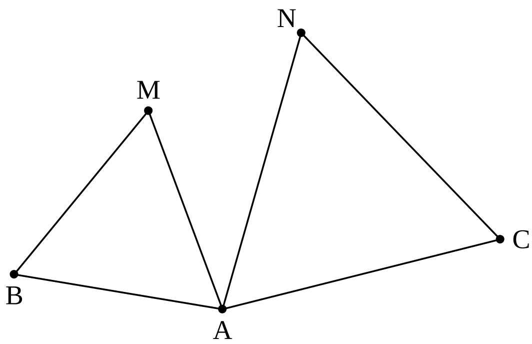
$$\begin{cases} M'N' = MN \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{M'N'}}\right) = \alpha \end{cases}$$



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle de sens direct. M et N sont les points du plan tels que les triangles AMB et ACN soient équilatéraux et de sens directs. On considère la rotation r de centre le point A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Détermine les images des points M et C par la rotation r.
2. Justifie que : MC = NB et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MC}\,;\ \overrightarrow{NB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.



Solution

1) *Comme le triangle AMB est équilatéral et de sens direct alors :* $\begin{cases} AM = AB \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\ \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc r(M) = B.

Comme le triangle ACN est équilatéral et de sens direct alors : $\begin{cases} AC = AN \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AN}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc r(C) = N.

2) *Comme r(M) = B et r(C) = N alors, d'après la propriété fondamentale on a :*
MC = BN et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC}\,;\ \overrightarrow{NB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2- Images de figures simples par une rotation

2-1. Image d'une droite – d'une demi-droite – d'un segment

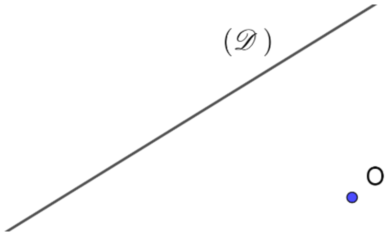
Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une rotation. Alors l'image :

- de la droite (AB) est la droite (A'B').
- de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').
- du segment [AB] est le segment [A'B']

Exercice de fixation

Construire l'image de la droite $(\mathscr{D})$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Solution

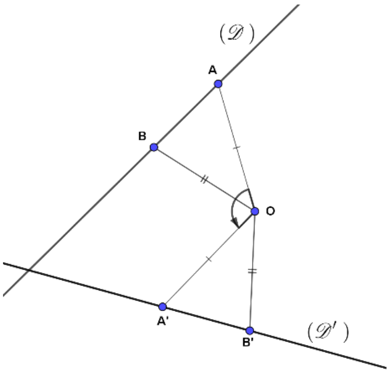
Notons $(\mathscr{D}')$ l'image de $(\mathscr{D})$ par r.

Soit A et B deux points de la droite (D) ; A' et B' les images respectives de A et B par r.

Comme r(A) = A' alors Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *et OA = OA', d'où la construction de A'*

Comme: r(B) = B' alors Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *et OB = OB', d'où la construction de B'.*

$(\mathscr{D}')$ est donc la droite (A'B'). (Voir figure ci-après).



Remarque : Pour déterminer graphiquement l'image :

- d'une droite, il suffit de trouver les images de deux points de cette droite.
- d'une demi- droite, il suffit de trouver les images de son origine et d'un autre point de cette demi-droite.
- d'un segment, il suffit de trouver les images de ses extrémités.

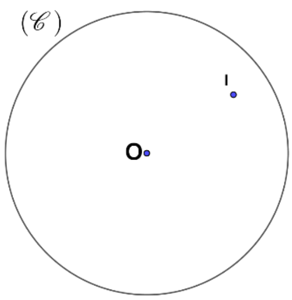
2-4. Image d'un cercle

Propriété

On considère un point O du plan et r une rotation telle que $r(O) = O'$. L'image du cercle (C) de centre O et de rayon R par la rotation r est le cercle (C') de centre O' et de même rayon R.

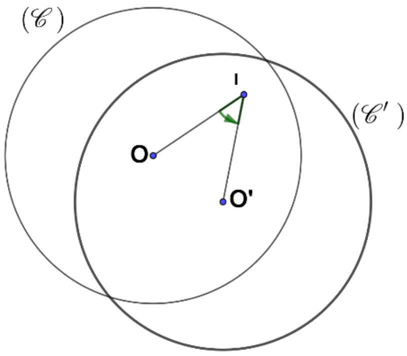
Exercice de fixation

Construire l'image du cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



Solution

Notons ($\mathscr{C}$ ') l'image de ($\mathscr{C}$) par r.
($\mathscr{C}$ ') est le cercle de centre O' image de O par r et de même rayon que ($\mathscr{C}$).
Comme r(O) = O' alors Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'}}\right)$ *et IO = IO' , d'où la construction de O'.*
($\mathscr{C}$ ') est donc le cercle de centre O' et de même rayon que ($\mathscr{C}$) . (Voir figure ci-après).



3- Propriétés de conservation par une rotation

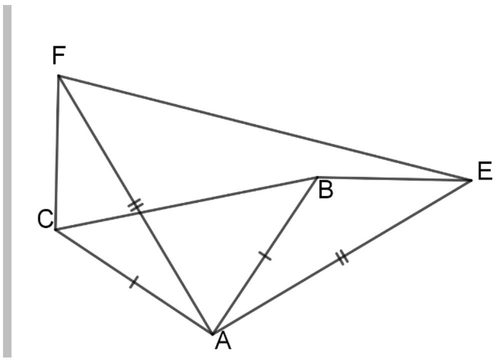
Propriétés

Toute rotation transforme :

- Deux droites parallèles en deux droites parallèles (**conservation du parallélisme**).
- Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires (**conservation de l'orthogonalité**).
- Un angle orienté en un angle orienté de même mesure (**conservation de l'angle orienté**).
- Le milieu d'un segment en le milieu de l'image de ce segment (**conservation du milieu**).
- Trois points alignés en trois points alignés (**conservation de l'alignement**).
- Deux figures sécantes (ou tangentes) en deux figures sécantes (ou tangentes) (**conservation du contact**).

Exercice de fixation

Sur la figure ci – dessous, ABC et AEF sont deux triangles rectangles isocèles en A et de sens directs.
En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la propriété de conservation qui convient, démontre que : $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}}\right) = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}\right)$.



Solution

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r(B) = C car $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$ *et AB = AC . r(E) = F car* $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}\right) = \frac{\pi}{2}$ *et AE = AF .*

E	F
A	A
B	C

Comme les points E, A et B ont pour images respectives les points F, A et C par r alors d'après la conservation des angles orientés par les rotations on a :

$$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}\right).$$

4- Caractérisation d'une rotation

4-1. Rotation caractérisée par son centre, un point et son image

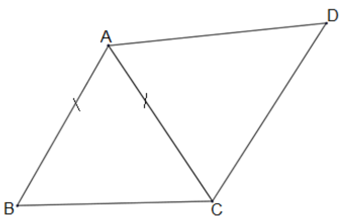
Propriété

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan tels que : $AB = AC$.
Il existe une rotation et une seule, de centre A qui applique B sur C.

Exercice de fixation

On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et ACD.
Détermine l'angle de la rotation de centre A qui applique B sur D.

Solution



La rotation de centre A qui applique B sur D a pour angle $\frac{2\pi}{3}$

4-2. Rotation caractérisée par deux points distincts et leurs images

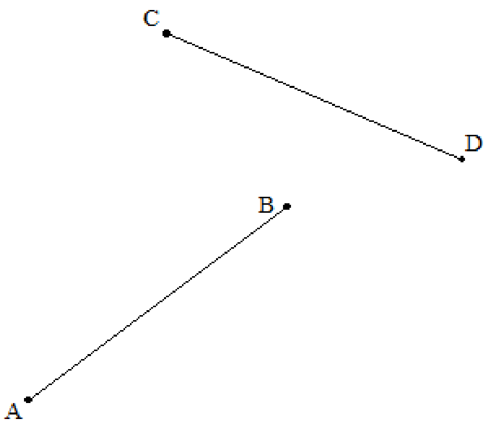
Propriété

Si M , N , M' et N' sont quatre points du plan tels que :

$MN = M'N'$, $M \neq N$ et $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{M'N'}$ alors il existe une rotation r et une seule telle que $r(M) = M'$ et $r(N) = N'$.

Exercice de fixation

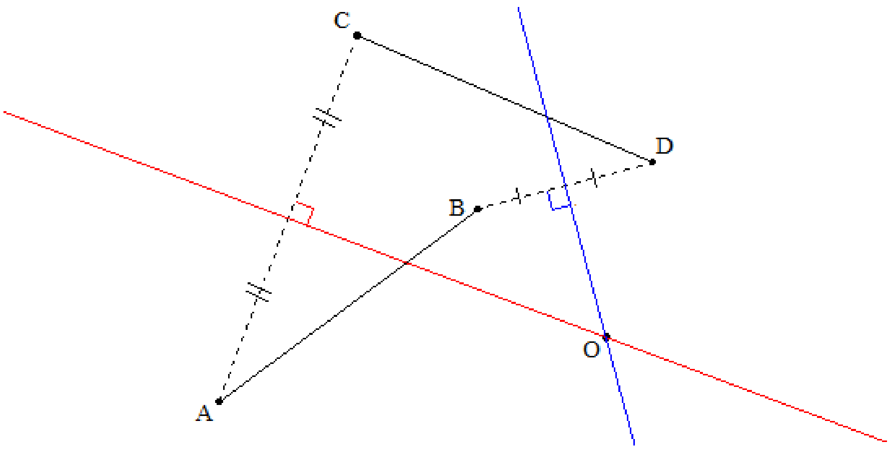
Dans chacun des cas de figure ci-dessous, A, B, C et D sont quatre points du plan deux à deux distincts tels que : $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
Reproduis la figure ci-dessous puis construis le centre O de la rotation r qui transforme A en C et B en D.



Solution

Considérons la rotation r qui transforme A en C et B en D, et O son centre.

On a donc : OA = OC et OB = OD. Alors O appartient à la fois à la médiatrice [AC] et à la médiatrice [BD].



Remarques

Lorsque la propriété précédente est vérifiée, notons (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments $[MM']$ et $[NN']$, alors :

- L'angle de la rotation r est $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{M'N'}}\right)$.

• Le centre Ω de la rotation r est :

- le point d'intersection de (Δ) et (Δ') si (Δ) et (Δ') sont sécantes,

- le point d'intersection de (Δ) et (MN) si (Δ) et (Δ') sont confondues. Dans ce cas la droite (M'N') est l'image de la droite (MN) par la rotation r.

4-3. Rotation déterminée par la donnée de l'angle, un point et son image.

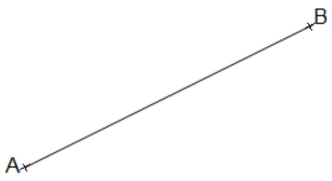
Propriété

Soit un angle orienté de mesure principale α. M et N sont deux points du plan. Il existe une unique rotation r de mesure d'angle α qui transforme M en N.

Dans ce cas, son centre Ω de cette rotation s'obtient comme l'intersection de la médiatrice du segment $[MN]$ et de l'arc capable de mesure principale α et d'extrémité $[MN]$.

Exercice de fixation

Soit deux points A et B. Construis le centre de la rotation qui applique A sur B et dont l'angle orienté a pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$.



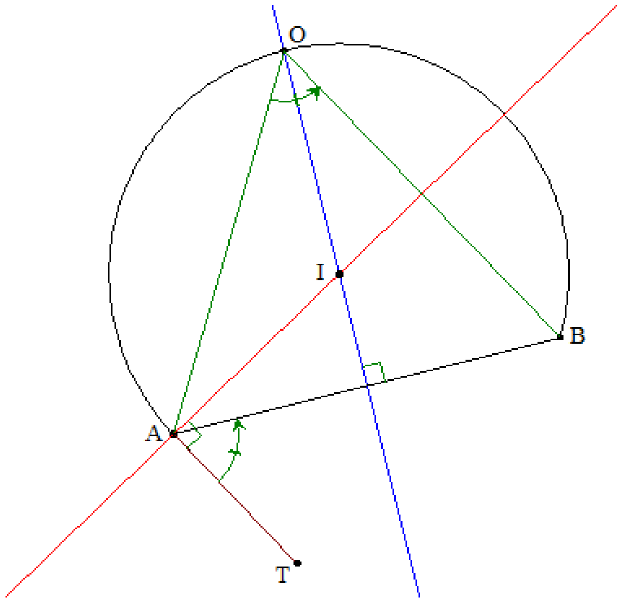
Solution

Soit le point T tel que $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \frac{\pi}{3}$.

Le centre I de l'arc capable est point d'intersection de la médiatrice (Δ) du segment [AB] et de la perpendiculaire à [AT] passant par A.

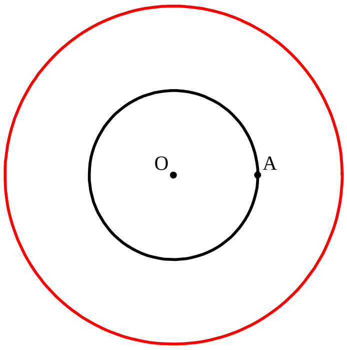
L'arc capable $(\mathcal{C})$ est l'arc de cercle d'extrémités A et B (privé des points A et B) puis situé dans demi-plan de bord (AB) ne contenant pas le point T.

Le centre O est le point d'intersection de (Δ) et $(\mathcal{C})$.



C- Situation complexe

Au cours d'une séance de formation, un membre du club de mathématiques construit deux cercles concentriques dont le rayons de l'un est le double de celui de l'autre. Après voir placé un point A sur le plus petit des deux cercles, il affirme que l'on peut construire un triangle ABC équilatéral où B et C sont l'un sur le plus petit cercle et l'autre sur le grand cercle. Curieux, les membres se proposent de réfléchir et si possible d'en donner une construction.
Elève de 2nde C, le club de mathématique te sollicite pour faire construction.
Propose une solution argumentée aux membres du club de mathématique.



Solution

Pour résoudre cette question, nous allons utiliser nos connaissances sur la leçon les rotations.

Pour cela nous allons :

- considérer la rotation r de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- déterminer (Γ) l'image du petit cercle (C_1) par r.
- identifier les points B et C tels que le triangle abc est équilatéral.

r(A) = A ; r(O) = O'$\Longrightarrow$ AO = AO' et mes $\widehat{OAO'} = \frac{\pi}{3}$. Donc le tringle OAO' est équilatéral. Par conséquent O'$\in$ (C_1). On a : OO' = R = 2R – R. Donc (Γ) et le grand cercle (C_2) sont tangents. Soit C ce point.

En outre, (Γ) et (C_1) se coupent en un second point. Soit B ce point.

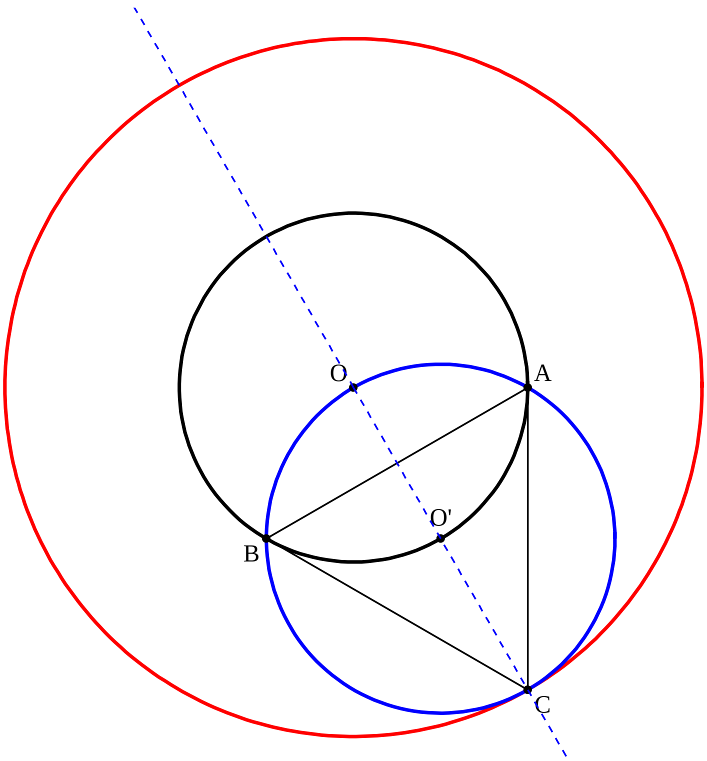
Montrons que le triangle ABC est équilatéral.

Le quadrilatère AOBO' est un losange et mes$\widehat{BO'A}$ = 2mes$\widehat{AOO'}$ = $\frac{2\pi}{3}$.

$\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans le cercle (Γ). $\widehat{BO'A}$ est son angle au centre associé.

Donc mes$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} mes\widehat{BO'A} = \frac{\pi}{3}$.

La droite (CO) est médiatrice de [AB] par conséquent ABC est un triangle équilatéral.



En utilisant la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$, on obtient le deuxième AB'C'. Les deux triangles sont symétriques par rapport à l'axe (AO).

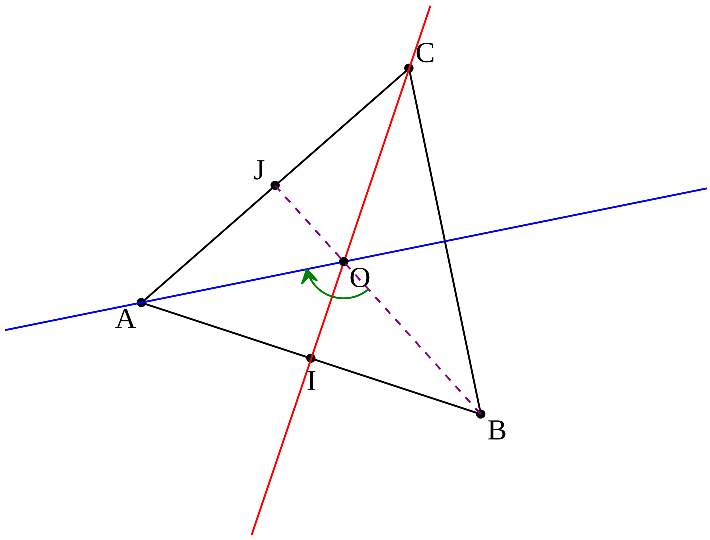
D-EXERCICES

Exercice 1

1. a) Construis ABC un triangle équilatéral de côté 4 centimètres de sens direct.
   b) Place les points I et J, milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
2. Détermine le centre et l'angle de la rotation r qui applique I en J et B en A.

Solution

1. Construction du triangle et repérage des milieux I et J.



2. Détermination des caractéristiques de la rotation r

   r(B) = A et r(I) = J.

   Soit O le centre de la rotation. (d_1) la médiatrice du segment [AB] et (d_2) celle du segment [IJ]. Donc : {O} = $(d_1) \cap (d_2)$.

   Comme le triangle ABC est équilatéral alors (d_1) et (d_2) en sont des hauteurs (ou médianes ou bissectrices). Par conséquent le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

   La mesure d'angle est $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ car dans le triangle OAB on a :
   $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

.

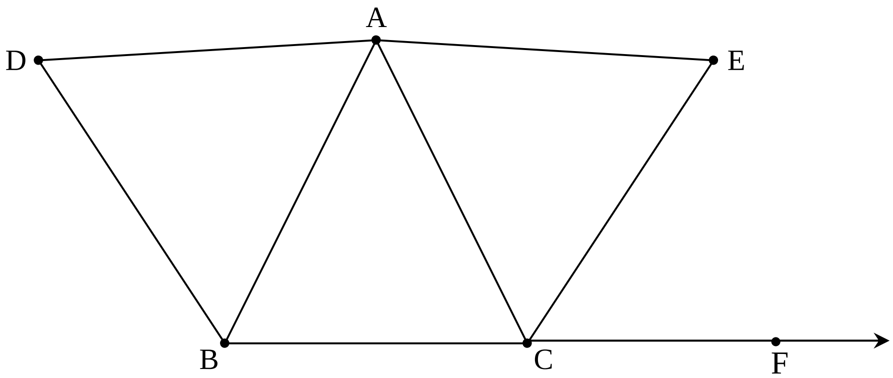
Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$. On considère les triangles équilatéraux directs ADB et ACE.

1. Fais une figure
2. a) Justifie qu'il existe une rotation qui applique D sur B et C sur E.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de cette rotation.
3. Détermine $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{BE}}\right)$.
4. Justifie que : $DC = BE$.

Solution

1. Figure



2. a) Existence de la rotation

ABC un triangle isocèle de sommet A, on a : AB = AC.

Les triangles ADB et ACE sont équilatéraux, on a DB = AB et AC = CE. Donc DB = CE.

Les angles $\widehat{DBF}$ et $\widehat{ECF}$ sont correspondants. Donc : mes$\widehat{DBF}$ = mes$\widehat{DBA}$ + mes$\widehat{ABC}$ = $\frac{3\pi}{4}$

mes$\widehat{ECF}$ = mes $\widehat{BCF}$ – mes $\widehat{BCE}$ = $\frac{\pi}{4}$.

mes$\widehat{BDF}$ ≠ mes$\widehat{ECF}$ donc $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{CE}$.

En définitive, il existe une seule rotation r transformant D en B et C en E.

b) les éléments caractéristiques de la rotation r
Les médiatrices des segments [BD] et [CE] se coupent en A. d'où A est le centre de la rotation r.

La mesure d'angle de la rotation r est : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

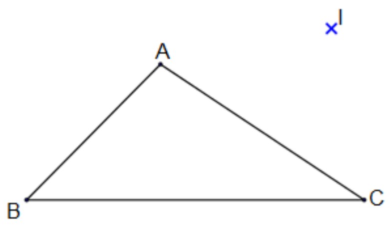
3. Déterminons $Mes(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BE}})$
$r(D) = B \; et \; r(C) = E$. Donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BE}}\right) = \frac{\pi}{3}$

4. Montrons DC = BE
$r(D) = B \; et \; r(C) = E$. Donc DC = BE car la rotation conserve la distance.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle et I un point du plan.

Construis à la règle et au compas, l'image du triangle ABC par une rotation r de centre I sachant que l'image de C' de C par r est située sur la droite (BC).



Solution

r	
I	I
A	A’
B	B’
C	C’

Construction de C’.

C’ $\in$ (BC). IC = IC’ $\Longrightarrow$ C’ appartient au cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre I passant par C et à la droite (BC).

C’ est donc le second point d’intersection de $(\mathcal{C}_1)$ et (BC).

Construction de A’.

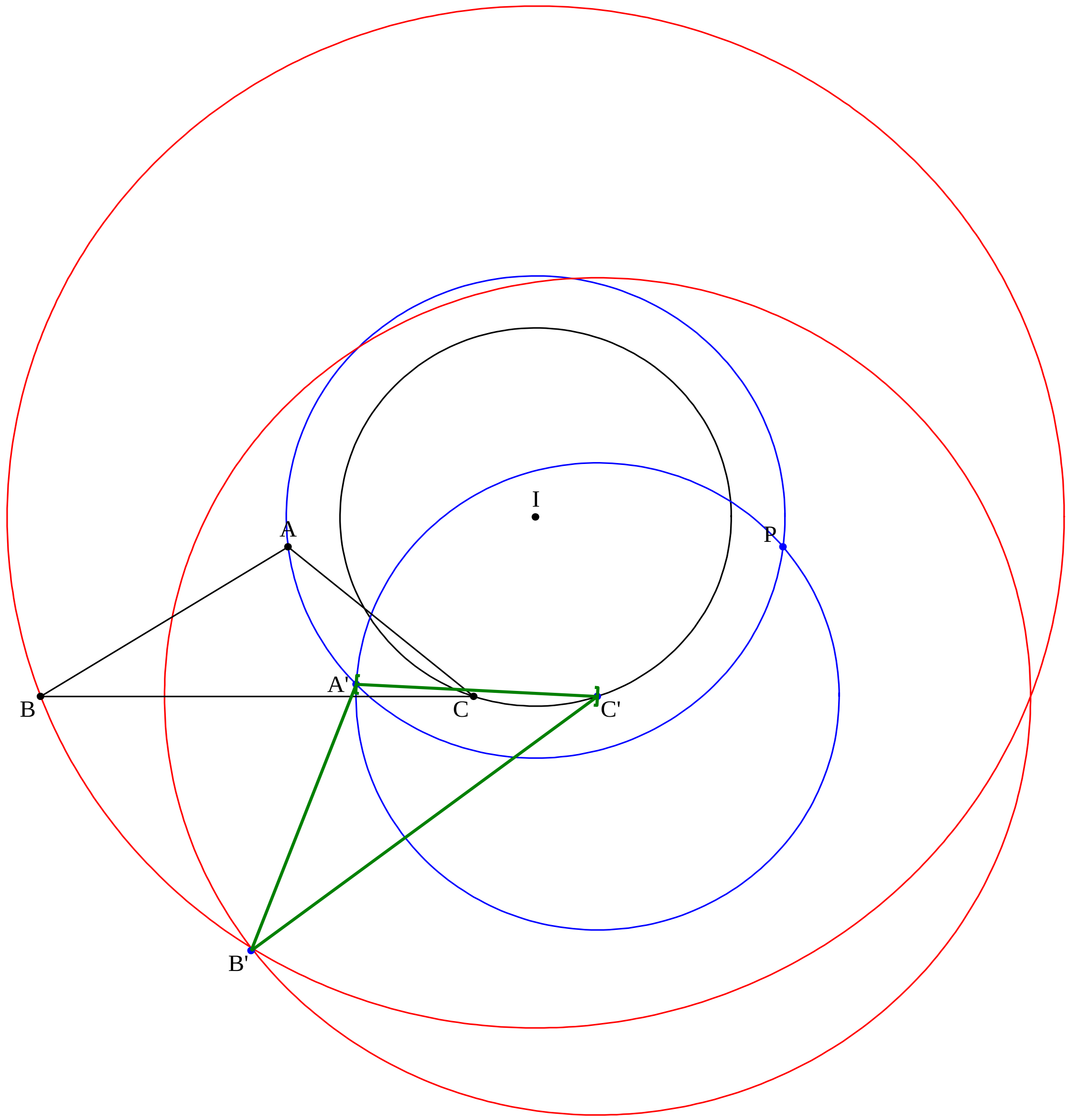
On a : IA = IA’ et AC = A’C’. Donc le point A’ un point d’intersection du cercle de centre I passant par A et du cercle de centre C’ et de rayon AC.

Le point A’ est tel que les triangles IA’C’ et IAC sont de même sens.

Construction de B’.

On a : IB = IB’ et BC = B’C’. Donc le point B’ un point d’intersection du cercle de centre I passant par B et du cercle de centre C’ et de rayon BC.

Le point B’ est tel que les triangles IB’C’ et IBC sont de même sens.



Exercice 4

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et A est un point extérieur à $(\mathcal{C})$. M est un point du cercle $(\mathcal{C})$ et N est le point du plan tel que le triangle AMN est rectangle et isocèle en A et de sens direct.

Détermine et construis l'ensemble des points N lorsque le point M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$.

Solution

Le triangle AMN est rectangle et isocèle en A et de sens direct.

On a :AN=AM et

Mes$(\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})}) = \frac{\pi}{2}$ donc N est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Or

$r(M) = N$, $r(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}')$ et

M $\in (\mathcal{C})$ donc N $\in (\mathcal{C}')$.

Lorsque le point M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$, l'ensemble des points N est le cercle $(\mathcal{C}')$.