MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 6 heures Code :

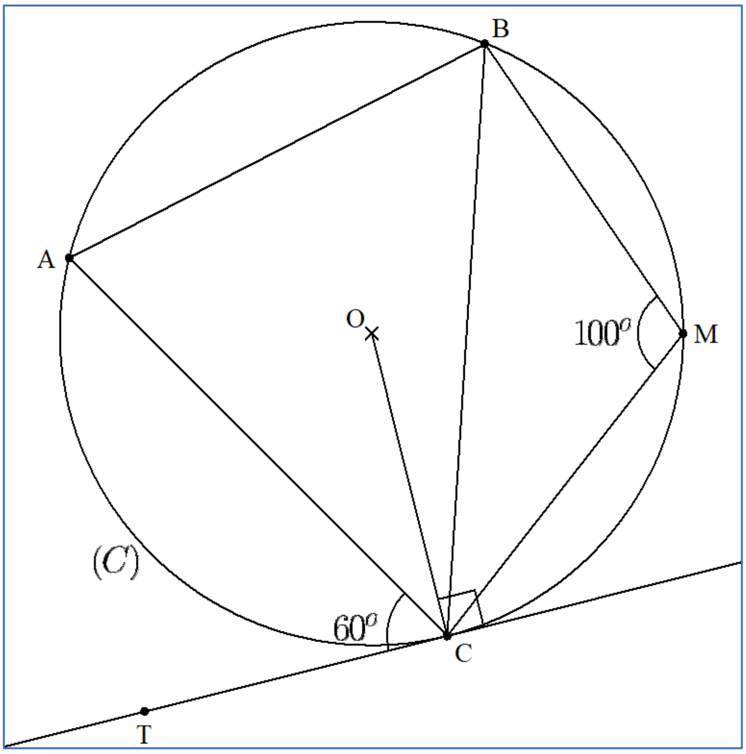
Compétence 3 : **Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**

Thème 1 : Géométrie du plan

Leçon 7 : ANGLES INSCRITS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour embellir la devanture de leur classe, des élèves d'une classe de 2^{nd} C décident de planter des roses. Les filles de la classe proposent la figure ci-dessous où (C) est un cercle centre O et de rayon réel 3m et elles souhaitent que l'aire du triangle ABC soit réservée pour les 40 pieds de roses blanches qu'elles ont achetées. Le chef de classe soutient qu'avec 5 pieds au mètre carré il n'y a pas suffisamment de pieds de roses blanches. Les filles ne sont pas d'accord. Alors tous les élèves de la classe décident de faire des calculs pour en avoir le cœur net. On donne AC = 5 m.



B. CONTENU DE LA LECON

I ANGLES INSCRITS

1- Angle inscrit défini par une corde et un point.

a- Présentation

Deux points distincts A et B d'un cercle définissent deux arcs de cercles :

- Celui dont la longueur est plus petite, noté $\widehat{AB}$
- Celui dont la longueur est plus grande, noté $\breve{AB}$.

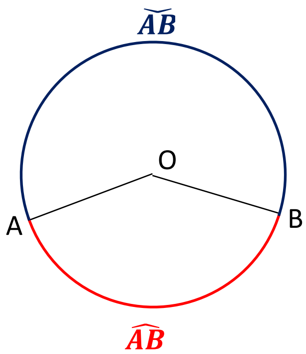
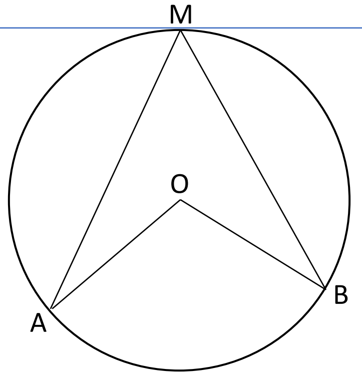
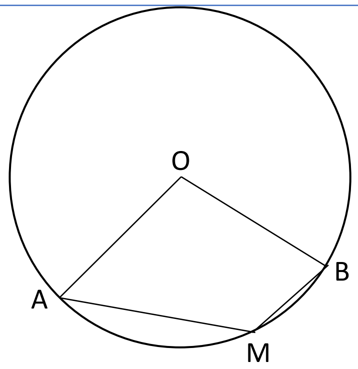


Figure 2 **Figure 3**



Le point M appartient à l'arc $\breve{AB}$

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est aigu et il intercepte l'arc $\widehat{AB}$



Le point M appartient à l'arc $\widehat{AB}$

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est obtus et il intercepte l'arc $\breve{AB}$

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ sont dits associés.

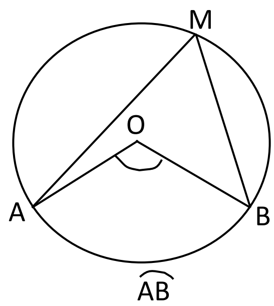
Remarque

Lorsque la corde [AB] est un diamètre, alors les deux arcs de cercles sont des demi-cercles et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est un angle plat qui intercepte l'un ou l'autre des deux demi-cercles.

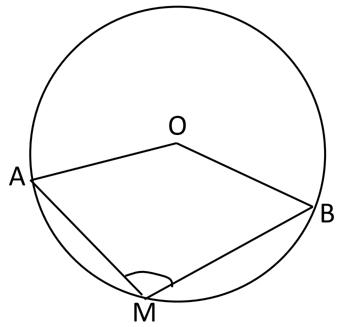
b- Propriétés :

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O.

- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc AB, alors : $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.

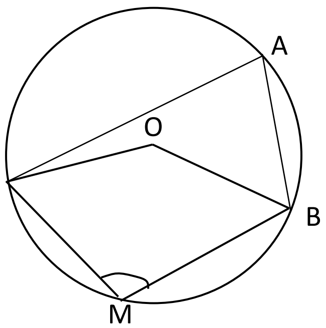


- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\breve{AB}$, alors : $mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $mes\widehat{BOC}$= 138°. Calcule $mes\widehat{BAC}$ et $mes\widehat{BMC}$.



Réponse proposée

Calculons $mes\widehat{BAC}\ et\ mes\widehat{BMC}$.
Dans le cercle de centre O, $\widehat{BAC}$ est un angle aigu inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{BOC}$

Donc $mes\widehat{BAC}$ = $\frac{1}{2}mes\widehat{BOC}$ = 69°

$\widehat{BMC}$ est un angle obtus inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\smile}{BC}$

Donc $mes\widehat{BMC}$= $180° - \frac{1}{2}mes\widehat{BOC}$

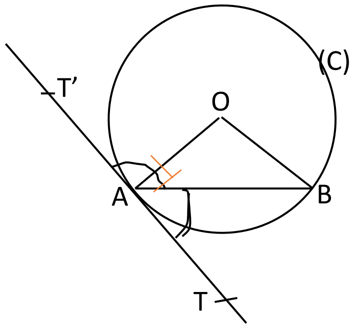
$mes\widehat{BMC} = 180° - 69° = 111°$

2. **Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente**.

a- Présentation

(C) est un cercle de centre O

(TT') est la tangente au cercle (C) en A.

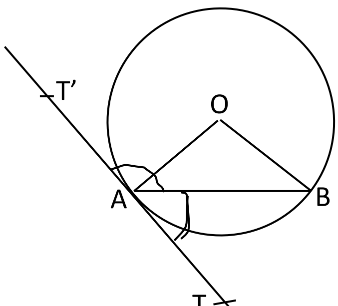


- $\widehat{TAB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
- $\widehat{T'AB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

b- Propriétés

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) de centre O qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A. On a :

- $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$.
- $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$

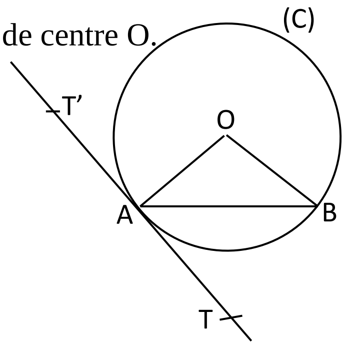


Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (TT') est la tangente en A au cercle (C) de centre O.

On donne $mes\widehat{AOB} = 108°$.

Calcule $mes\widehat{BAT}$ et $mes\widehat{BAT'}$.



Réponse proposée

Je calcule $mes\widehat{BAT}$ et $mes\widehat{BAT'}$.

[AT) est la demi-tangente en A à (C) contenu dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas le centre O du cercle, donc $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$.

Alors $mes\widehat{BAT} = \frac{1}{2} \times 108° = 54°$.

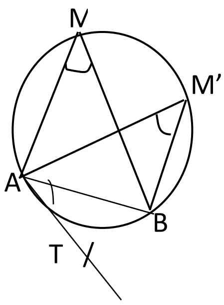
[AT') est l'autre demi-tangente en A, donc $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$.

Alors $mes\widehat{BAT'} = 180° - 54° = 126°$.

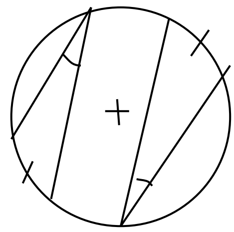
c- Conséquences

Propriétés

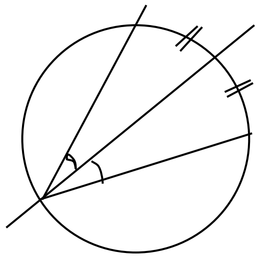
P1 : Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont même mesure.



P2 : Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure

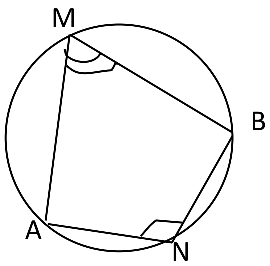


P3 : La bissectrice d'un angle inscrit dans un cercle partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



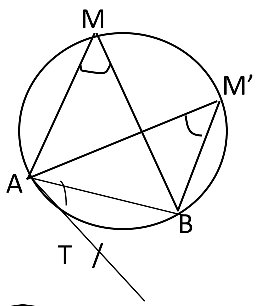
P4 : Si M ∈ $\overset{\smile}{AB}$ et N ∈ $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

$$mes\widehat{AMB} + mes\widehat{ANB} = 180°$$



Exercice de fixation : On considère la figure ci-contre où $mes\widehat{AMB} = 37°$

Détermine $mes\widehat{AMB}$; $mes\widehat{AM'B}$ et $mes\widehat{TAB}$.



Solution

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$, $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{TAB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ donc : $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{AM'B} = mes\widehat{TAB} = 37°$

II - <u>LIEU GEOMETRIQUE DES POINTS M TELS QUE : $mes\widehat{AMB} = \alpha°$.</u>

1. <u>Détermination de l'ensemble des points M tels que : $mes\widehat{AMB} = \alpha°$</u>

<u>**Propriété**</u>

Soit A et B deux points distincts, θ un réel tel que 0 < θ < 180°.

Le lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB}$ = θ ° est <u>la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).</u>

2. <u>Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = \theta°$</u>

Déterminer le lieu géométrique des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = \theta}$°, avec $0 < \theta < 180$°, revient à construire deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB) appelés ***arcs capables d'un angle de $\boldsymbol{\theta}$°***.

Programme de construction

- Je trace un segment [AB] ;
- Je trace une demi-droite [AT) tel que $mes\ \widehat{TAB} = \theta$°;
- Je construis le point O, intersection de la perpendiculaire à la droite (AT) en A et de la médiatrice du segment [AB] ;
- Je construis l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point T ;
- Je construis le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) privés des extrémités A et B.

<u>Remarques</u>

Soit M un point distinct de A et de B.

- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 0}$° est la droite (AB) privé du segment [AB].
- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 180}$° est le segment [AB] privé des points A et B.
- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 90}$° est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

<u>Exercice de fixation</u>

On donne AB = 4 cm. Construis l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 30$°.

<u>Proposition de solution</u>

Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 30$°.

- On construit le segment [AB] tel que AB = 4
- On construit un point T tel que $mes\widehat{TAB} = 30$°.
- On trace la perpendiculaire à la droite (AT) passant par A et la médiatrice du segment [AB]. Ces deux droites se coupent en O.
- On construit l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point T.
- On construit le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) privés des extrémités A et B.

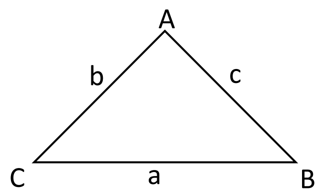
III- RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1. Aire d'un triangle

Propriété

ABC est un triangle d'aire $\mathcal{A}$. On pose : a = BC, b = AC et c = AB

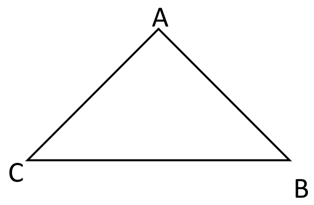
On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$bc sin$\hat{A}$ = $\frac{1}{2}$ ac sin $\hat{B}$ = $\frac{1}{2}$ ab sin $\hat{C}$



Exercice de fixation

Pour la figure ci-contre, on donne : AB = 5 cm, BC = 6 cm

et $mes\widehat{ABC} = 30°$. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.



Solution

Je calcule l'aire du triangle ABC.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times sin\widehat{ABC}.$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times sin30° = 7{,}5\ cm^2.$$

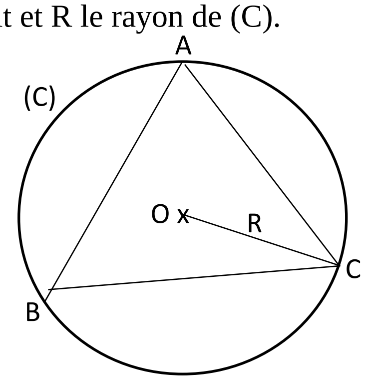
2- Théorème des sinus

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C).
On pose a = BC, b = AC et c = AB

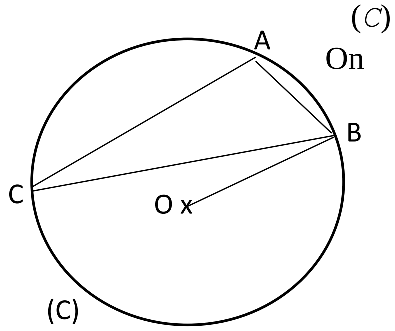
On a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R.$$



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles, $(\mathcal{C})$ est le cercle centre O circonscrit au triangle ABC. On donne : sin (60°) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. BC = 8cm, OB = 5cm, $mes\hat{C} = 60°$



Détermine AB.

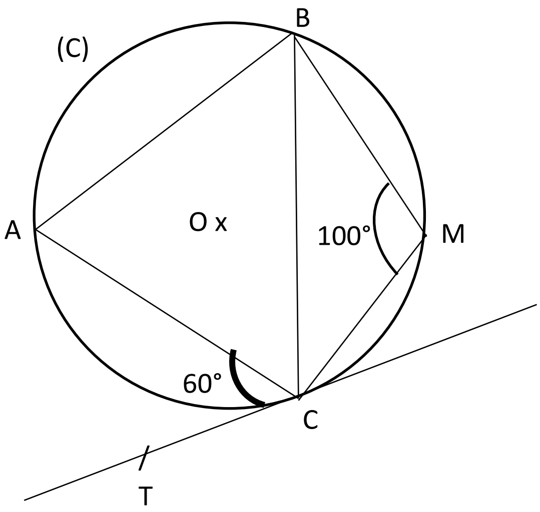
<u>Réponse proposée</u>

Je détermine AB.

On a $\frac{AB}{sin\hat{C}} = 2\ OB$, donc $AB = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}cm.$

C. SITUATION COMPLEXE

Pour embellir la devanture de leur classe, des élèves d'une classe de 2nd C décident de planter des roses. Les filles de la classe proposent la figure ci-dessous où (C) est un cercle centre O et elles souhaitent que l'aire du triangle ABC soit réservée pour les 40 pieds de roses blanches qu'elles ont achetées. Le chef de classe soutient qu'avec 5 pieds au mètre carré il n'y a pas suffisamment de pieds de roses blanches. Les filles ne sont pas d'accord. Avec une production argumentée, tranche cette discussion. On donne AC = 5 m.



Solution :

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la leçon angles inscrits.

Pour cela, nous calculer :

- la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$
- la longueur BC
- l'aire du triangle ABC

Déterminons le nombre de pieds de roses blanches que peut contenir le triangle ABC.

1) Déterminons les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$

- Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BMC}$ sont supplémentaires
  donc $mes\widehat{BAC} + mes\widehat{BMC} = 180° \Leftrightarrow mes\widehat{BAC} = 180° - 100° = 80°$
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACT}$ sont des angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AC}$ donc $mes\widehat{ACT} = mes\widehat{ABC} = 60°$
- Dans le triangle ABC, on a : $mes\widehat{BAC} + mes\widehat{BCA} + mes\widehat{CBA} = 180°$
  Donc $mes\widehat{BCA} = 180° - (60° + 80°) = 40°$

2- Déterminons la longueur BC

D'après le théorème des sinus on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{BC}{\sin 80°} = \frac{5}{\sin 60°} \Leftrightarrow BC = \frac{5 sin80°}{sin60} = 5{,}68\ cm.$$

3- L'aire du triangle ABC est :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5{,}68 \times sin40° = 9{,}12\ \ m^2$

Le nombre de pieds correspondant à 9,12 m² est : $5 \times 9{,}12 = 45{,}6$ pieds de rose.

On a : 40 < 45,6. À raison de 5 pieds par mètre carré, il faut environ 46 pieds de roses blanches. Le chef de classe a donc raison.

D. EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Pour chaque énoncé, écris V s'il est vrai ou F s'il est faux. Aucune justification n'est demandée.

N°	Propositions
1	Des angles inscrits dans un cercle ont la même mesure.
2	Des angles inscrits dans le même cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.
3	Si M et N sont deux points de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ d'un cercle, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

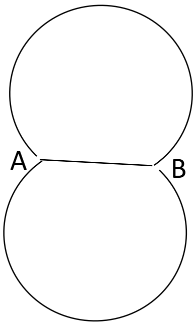
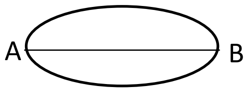
Solution :

1.F ; 2. V ; 3. F

Exercice 2

Pour chaque ligne du tableau une seule des réponses proposées est juste.

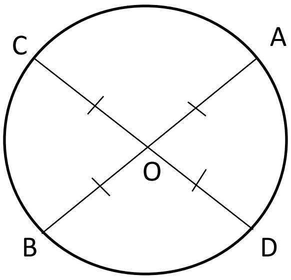
Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses	
N°		A	B
1	L'aire du triangle EFG est	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} EF \times EG \times sin\hat{E}$	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} EF \times EG \times sin\hat{F}$
2	Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On a :	$\frac{AB}{sin\hat{A}} = \frac{BC}{sin\hat{B}} = \frac{AC}{sin\hat{C}} = 2R$	$\frac{BC}{sin\hat{A}} = \frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{C}} = 2R$
3	L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = \theta°$ avec $90° < \theta < 180°$ est représenté par des arcs de cercle symétriques par rapport à (AB) de la forme :		

Solution :

1. A ; 2.B ; 3.B

Exercice 3



Considère la figure ci-contre avec $mes\widehat{COA} = 86°$.

Calcule $mes\widehat{ABC}$, $mes\widehat{COB}$ et $mes\widehat{BAC}$

Solution

- Calcul de $mes\widehat{ABC}$
  $mes\widehat{ABC} = \frac{1}{2} mes\widehat{COA} = 43°$ car $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit et $\widehat{COA}$ son angle au centre associé.

- Calcul de $mes\widehat{COB}$
  Les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires. Donc :
  $mes\widehat{COB} = 180° - mes\widehat{COA}$ = 180° - 43° = 137°

- Calcul de $mes\widehat{BAC}$
  $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit et $\widehat{COB}$ son angle au centre associé.

$$mes\widehat{BAC} = \frac{1}{2}mes\widehat{COB} = 68{,}5°$$

Exercice de renforcement

Exercice 4

[PQ] est un segment de longueur 4 cm.

Construis dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points M tels que :

a/ $mes\ \widehat{PMQ} = 50°$.   b/ $mes\ \widehat{PMQ} = 140°$.

SOLUTION

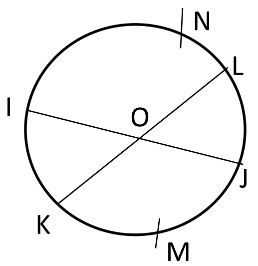
a/ Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{PMQ} = 50°$.
Programme de construction

- On construit le segment [PQ] tel que PQ = 4
- On construit un point T tel que $mes\widehat{TPQ} = 50°$.
- On trace la perpendiculaire à la droite (PT) passant par P et la médiatrice du segment [PQ]. Ces deux droites se coupent en O.
- On construit l'arc de cercle de centre O et de rayon OP situé dans le demi-plan de frontière (PQ) ne contenant pas le point T.
- On construit le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (PQ).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (PQ) privés des extrémités P et Q.

b/ Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{PMQ} = 140°$.
Le programme de construction est identique à la précédente sauf que le point T est construit tel que $mes\widehat{TPQ} = 140°$.

Exercice 5

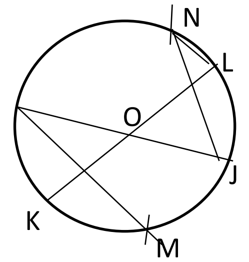


Sur la figure ci-contre, [IJ] et [KL] sont des diamètres d'un même cercle de centre O.

N est un point de $\widehat{IL}$ et M un point de $\widehat{KJ}$.

Démontre que $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$.

Solution :



Démontrons que $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$

L'angle inscrit $\widehat{KMI}$ et l'angle au centre $\widehat{KOI}$ sont associés donc $mes\widehat{KMI} = \frac{1}{2}mes\widehat{KOI}$.

L'angle inscrit $\widehat{JNL}$ et l'angle au centre $\widehat{JOL}$ sont associés donc $mes\widehat{JNL} = \frac{1}{2}mes\widehat{JOL}$, or les angles $\widehat{KOI}$ et $\widehat{JOL}$ sont opposés par le sommet donc $mes\widehat{KOI} = mes\widehat{JOL}$

ainsi $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$.

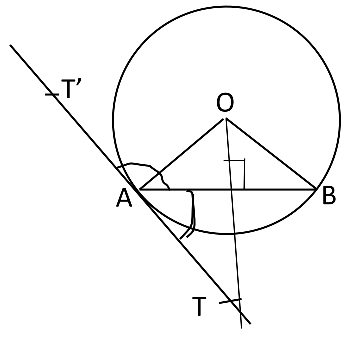
Exercice 6

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) de centre O qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A.

1/ a- Exprime mes $\widehat{OAB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

b- Déduis-en mes $\widehat{TAB}$.

2/ Détermine l'expression mes $\widehat{T'AB}$.



Solution :

1) A- Le triangle OAB est isocèle O donc : 2mes$\widehat{OAB} + mes\ \widehat{AOB}. = 180°$

   $mes\widehat{OAB} = 90° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.

2) Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{TAB}$ sont complémentaires donc

   $mes\ \widehat{OAB} = 90° - mes\widehat{TAB}$ d'où $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}mes\ \widehat{AOB}$

3) Les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont supplémentaires donc

$$mes\widehat{T'AB} = 180° - mes\widehat{TAB} = 180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$$

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que : BC = 25, AC = 36 et $mes\hat{B} = 72°$.

1/ Démontre que $mes\hat{A} = 41{,}30°$

2/ Justifie que AB = 34,77cm

3/ Détermine le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

4/ Calcule l'aire de ce triangle.

Solution

1/ Démontrons que $mes\hat{A} = 41{,}30°$

D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{BC}{sin\hat{A}}$

Donc $sin\hat{A} = \frac{BC}{AC} \times sin\hat{B} = \frac{25}{36} sin72° = 0{,}66 \Longrightarrow mes\hat{A} = 41{,}30°$.

2/ Justifions que AB = 34,77 cm

Déterminons d'abord $mes\hat{C}$.

$mes\hat{C} = 180° - \left(mes\hat{B} + mes\hat{A}\right) = 66{,}7°$.

En utilisant à nouveau le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{C}}$.

On obtient AB = 34,77 cm

3/ Déterminons le rayon du cercle circonscrit.

D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = 2R \iff R = \frac{AC}{2sin\hat{B}} = \frac{36}{2sin72°} = 18{,}93\ cm$

4/ Calculons l'aire du triangle.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times sin\hat{B} = 0{,}5 \times 34{,}77 \times 25 \times sin72° = 413{,}36\ cm^2$$

Exercice d'approfondissement

Exercice 8

ABC est un triangle de périmètre P et R le rayon de son cercle circonscrit.

1/ Écris AB, BC et AC en fonction de R.

2/ Justifie que $sin\hat{A} + sin\hat{B} + sin\hat{C} = \frac{P}{2R}$.

Solution :

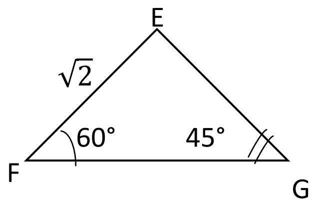
1) D'après le théorème des sinus on a :
   $AB = 2Rsin\widehat{C}\ , BC = 2Rsin\widehat{A}\ \ et\ AC = 2Rsin\widehat{B}$
2) $P = AB + BC + AC = 2R(sin\widehat{A} + sin\widehat{B} + sin\widehat{C})$ donc
   $sin\widehat{A} + sin\widehat{B} + sin\widehat{C} = \frac{P}{2R}$.

Exercice 9 L'unité est le centimètre.

EFG est un triangle tel que EF = $\sqrt{2}$, $mes\widehat{EFG} = 60°$ et $mes\widehat{EGF} = 45°$.

1) Calculer la longueur des côtés [EG] et [FG].
2) Calculer l'aire du triangle EFG
3) Calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle EFG

Solution :



1) - Calcul de EG.

Le théorème des sinus nous permet d'écrire

$$\frac{EG}{\sin\hat{F}} = \frac{EF}{\sin\hat{G}} \Leftrightarrow$$

$$EG = \frac{EF\sin\hat{F}}{\sin\hat{G}} = \frac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$$

- Calcul de FG

Dans le triangle ABC, on a : $mes\hat{E} + mes\hat{F} + mes\hat{G} = 180°$ donc

$mes\hat{E} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

On a : $\frac{FG}{\sin \hat{E}} = \frac{EF}{\sin \hat{G}} \Leftrightarrow FG = \frac{EF \sin 75°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2) L'aire du triangle EFG

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times EF \times EG \times sin\widehat{FEG} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6+2\sqrt{3}}{8} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

3) Calcul du rayon R.

$$\frac{EF}{\sin \hat{G}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Exercice 10

EFG est un triangle tel que : FG = 5cm, mes $\widehat{EGF}$ = 40°, mes $\widehat{GFE}$ = 50°.

1/ Construis le triangle EFG.

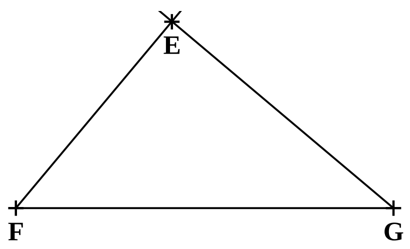
2/ Démontre que le triangle EFG est rectangle en E.

3/ Construis le cercle circonscrit au triangle EFG. Détermine son rayon.

4/ Calcule l'aire du triangle EFG.

Solution

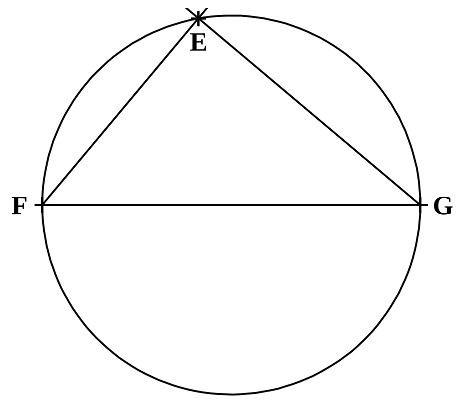
1. Construction du triangle EFG



2. Démontrons que le triangle EFG est rectangle en E.

$mes\hat{E} = 180° - \left(mes\hat{F} + mes\hat{G}\right) = 180° - (40° + 50°) = 90°$
Donc le triangle EFG est rectangle en E.

3/ Construction du cercle circo ons son rayon.

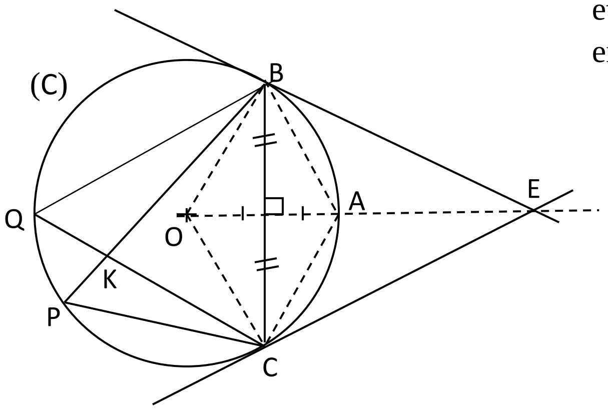


Comme le triangle EFG est rectangle en E, le milieu du segment [FG] est le centre circonscrit à ce triangle.
Le rayon est : R = $\frac{FG}{2} = 2{,}5\ cm$

4/ Calculons l'aire du triangle EFG.

Calculons d'abord EF
D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{FE}{sin\hat{G}} = 2R \ \Rightarrow EF = 3{,}21\ cm$
Donc pour l'aire, on a :
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times EF \times FG \times sin\hat{F} = \frac{1}{2} \times 3{,}21 \times 5 \times sin50° = 6{,}15\ cm^2$.

<u>Exercice 11</u>



On considère la figure codée ci-contre où (C) est le cercle de centre O et de rayon [OA]. Les droites (EB) et (EC) sont des tangentes à (C) respectivement en B et en C.

1) Démontre que le triangle OAB est équilatéral.
2) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$
3) Déduis-en que le triangle EBC est équilatéral.
4) On donne $mes\widehat{PKC} = 85°$.
   Démontre que $mes\widehat{PBQ} = 35°$

Solution

1) Démontrons que le triangle OAB est équilatéral.
   Les segments [OA] et [OB] sont deux rayons du cercle. Donc OA = OB.
   De plus la droite (BC) est la médiatrice du segment [OA]. Donc BO = BA.
   En définitive, on a : OA = OB = AB. Par conséquent le triangle OAB est équilatéral.

2) Déduisons la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BOC}}$
   Le symétrique de l'angle $\widehat{\mathrm{BOA}}$ par rapport à la droite (OA) est l'angle $\widehat{\mathrm{AOC}}$.
   Donc $mes\widehat{\mathrm{BOA}} = mes\widehat{\mathrm{AOC}}$
   $mes\widehat{\mathrm{BOC}} = mes\widehat{\mathrm{BOA}} + mes\widehat{\mathrm{AOC}} = 60° + 60° = 120°$.

3) Déduisons que le triangle EBC est équilatéral.
   D'une part, l'angle inscrit $\widehat{\mathrm{EBC}}$ et l'angle au centre $\widehat{\mathrm{BOC}}$ sont associés, donc $mes\widehat{\mathrm{EBC}} = 60°$.
   D'autre part, l'angle inscrit $\widehat{\mathrm{ECB}}$ et l'angle au centre $\widehat{\mathrm{BOC}}$ sont associés, donc $mes\widehat{\mathrm{ECB}} = 60°$.
   Il est alors évident que $mes\widehat{\mathrm{CEB}} = 60°$. Donc le triangle EBC est équilatéral.
4) Démontre que $mes\widehat{\mathrm{PBQ}} = 35°$
   Les angles $\widehat{\mathrm{PKC}}$ est $\widehat{\mathrm{QKB}}$ sont opposés par le sommet. Donc $mes\widehat{\mathrm{PKC}} = mes\widehat{\mathrm{QKB}} = 85°$.

   Dans le cercle $(\mathcal{C})$, l'angle inscrit $\widehat{\mathrm{BQC}}$ et l'angle au centre $\widehat{\mathrm{BOC}}$ sont associés, donc $mes\widehat{\mathrm{BQC}} = 60°$. Et comme $\widehat{\mathrm{BQC}} = \widehat{\mathrm{BQK}}$ alors $mes\widehat{\mathrm{BQK}} = mes\widehat{\mathrm{BQC}} = 60°$

   Finalement, dans le triangle QKB, on a : $mes\widehat{\mathrm{PBQ}} = 180° - (mes\widehat{\mathrm{BQK}} + mes\widehat{\mathrm{QKB}})$
   Ainsi : $mes\widehat{\mathrm{PBQ}} = 180° - (60° + 85°) = 35°$