MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures Code :

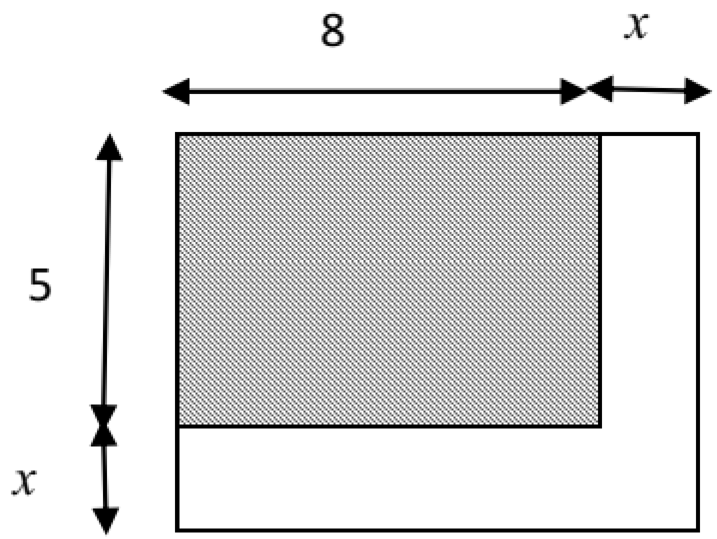
Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

LEÇON : FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

La coopérative scolaire de ton lycée utilise un terrain rectangulaire de 8 m sur 5 m pour produire des tomates.
Pour mieux organiser l'espace disponible, le Proviseur du lycée demande que les côtés du terrain soient augmentés chacun d'une longueur identique, comme l'indique la figure ci-dessous, afin d'obtenir un terrain rectangulaire de 88 m^2.
Pour respecter les exigences du Proviseur, les élèves de ta classe décident d'étudier les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles.



B-CONTENU DU COURS

I. GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1- Définition d'un polynôme

Définition

- Soit a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.
  On appelle monôme de coefficient a et de degré n, toute expression de la forme ax^n, où x est une variable réelle.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

Exemples de polynôme

$3x+1$, $4x^3-2x+1$ et $\frac{1}{3}x^4+2x^3+x-1$, sont des polynômes.

Contre-exemple

$\frac{1}{x^2}+3x-1$, n'est pas un polynôme.

2- Propriété fondamentale

Tout polynôme non nul $P(x)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Exercice de fixation :

On considère le polynôme $P(x)=2x-x^3+5x(x^2-x)+4x-3+2x^2$.,

Ecris $P(x)$ sous la façon $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Solution

$P(x)=2x-x^3+5x(x^2-x)+4x-3+2x^2$
$= 2x-x^3+5x^3-5x^2+4x-3+2x^2$
$= -x^3+5x^3-5x^2+2x^2+2x+4x-3$
$= 4x^3-3x^2+6x-3$.

3- Degré d'un polynôme

Définition

Un polynôme écris sous la forme $P(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n \neq 0)$ est dit réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

- n est appelé degré de P. On le note : d°P.
- Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n, a_kx^k est appelé terme de degré k.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ sont appelés les coefficients de P.

Remarque

Lorsque $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, P est appelé polynôme nul.

Exemple

Soit le polynôme P défini par : $P(x)=x^5+2x^4+3x^3-4x^2-8x-12$

- Le monôme de plus haut degré est : x^5.
- Le degré du polynôme P est : 5. On note d°$P=5$.
- Le terme de degré 2 est : $-4x^2$ et celui de degré 4 est : $2x^4$

4- Egalité de deux polynômes

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :
- ils ont même degré ;
- les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice de fixation

Soit $Q(x)=-3x^4+5x^3-4x^2-12$ et $R(x)=(a+2)x^4+5x^3-4x^2-bx-12$, deux polynômes.

Détermine les nombres réels a , b tels que les polynômes Q et R soient égaux.

Solution

les polynômes Q et R sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

d°Q = d°R = 4.
Il faut : $a+2=-3$ et $-b=0$; donc $a=-5$ et $b=0$.

5- Zéro d'un polynôme.
Définition

On appelle zéro d'un polynôme P tout nombre réel $\propto$ tel que : $P(\propto)=0$.

Remarque :
Déterminer les zéros d'un polynôme P, revient à résoudre l'équation $P(x)=0$.

Exemple
- Soit le polynôme P défini par $P(x)=x^3+3x^2$.

On a $\mathrm{P}(0)=0^3+3\times 0^2=0$ et $\mathrm{P}(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2=-27+27=0$ alors 0 et -3 sont des zéros de P.
- Soit le polynôme G défini par $G(x)=x^2-9$.

On a $G(x)=0$ *équivat* à $x^2-9=0$
équivaut à $(x-3)(x+3)=0$
équivaut à $x-3=0$ *ou* $x+3=0$
équivaut à $x=3$ *ou* $x=-3$
donc 3 *et* -3 sont les zéros de G.

6- Somme et produit de deux polynômes

a. Somme de deux polynômes

- **Définition**
  On appelle somme de deux polynômes P et Q le polynome noté $P+Q$ défini par :
  $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$.
- **Propriété**
  Soit P et Q deux polynômes.
  $d°(P+Q)$ est inférieur ou égal au plus grand des nombres $d°P$ et $d°Q$ *(égal lorsque $d°P\neq d°Q$)*
  ON note $d°(P+Q)\leq \max(d°P;\ d°Q)$

Exercice de fixation
On donne les polynômes P, Q et R suivants :
$P(x)=-2x^3+3x^2+7x-3$.
$Q(x)=-x^5-7x-3$.
$R(x)=2x^3-3x^2-10x$.
1- Calcule : $P(x)+Q(x)$ et $P(x)+R(x)$
2- Déduis en $d°(P+Q)$ et $d°(P+R)$

Solution

1- $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + (-x^5 - 7x - 3)$
$= -x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 6$
$(P+R)(x) = P(x) + R(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + (2x^3 - 3x^2 - 10x) = -3x - 3$
2- $d°(P+Q) = 5$ et $d°(P+R) = 1$.

b. Produit de polynômes

- **Définition**

  On appelle produit de deux polynômes P et Q le polynome noté $P \times Q$ défini par :
  $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$.

Remarques

- Si $P(x) = -1$ alors $PQ = (-1)Q$.
  $(-1)Q$ est noté $-Q$ et est appelé l'opposé de Q.
- $P - Q = P + (-Q)$

Exemple

Soit P et Q deux polynômes tels que : $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3$ et $Q(x) = -x^5 - 7x - 3$.

$$\begin{aligned} P - Q &= P(x) - Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 - (-x^5 - 7x - 3) \\ &= -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + x^5 + 7x + 3 \\ &= x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 14x \end{aligned}$$

- ***Propriété***

  Soit P et Q deux polynômes non nuls.
  $d°(P.Q) = d°P.d°Q$

Exercice de fixation

On donne les polynômes S et R suivants :
$S(x) = -7x^2 + x + 5$.
$R(x) = -2x^3 + 10x$.

1- Calcule le polynôme SR
2- Déduis en $d°(SR)$

Solution

1- $SR(x) = S(x) \times R(x) = (-7x^2 + x + 5)(-2x^3 + 10x)$
$= 14x^5 - 70x^3 - 2x^4 + 10x^2 - 10x^3 + 50x$
$= 14x^5 - 2x^4 - 80x^3 + 10x^2 + 50x$

2- $d°(SR) = 5$

7- Factorisation d'un polynôme

Définition

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
(4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(6) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Exemple

En utilisant les produits remarquables, on obtient :

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+41$$

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1^2)=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3$$
$$=(x-2)^3$$

$$8x^3+12x^2+6x+1=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$$
$$=(2x+1)^3$$

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$$

Exercice de fixation

On considère le polynôme B défini par : $B(x)=x^3-1-(x-1)(2x^2+x-3)$.
Ecris $B(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes de premier degré.

Solution

On a: $B(x)=x^3-1^3-(x-1)(2x^2+x-3)=(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(2x^2+x-3)$.
$B(x)=(x-1)[\,x^2+x+1-(2x^2+x-3)]=(x-1)(x^2+x+1-2x^2-x+3)$.
$B(x)=(x-1)(4-x^2)=(x-1)(2^2-x^2)$
Donc $B(x)=(x-1)(2-x)(2+x)$.

II. POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1- Forme canonique d'un polynôme du second degré

a- Forme canonique

Tout polynôme du second degré $P(x)$ tel que $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ peut se mettre sous la forme : $P(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$ où $\propto$ et β sont des nombres réels.
L'écriture $a[(x+\alpha)^2+\beta]$ de $P(x)$ est appelé forme canonique.

Cas général

a, b et c sont des nombres réels avec $a\neq 0$

$$P(x)=ax^2+bx+c$$
$$P(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$
$$P(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]$$

Cette expression de $P(x)$ est sa forme canonique avec $\propto=\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$

Exercice de fixation

Ecris chacun des polynômes ci-dessous sous la forme canonique.
$T(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad K(x) = 2x^2 - 6x + 7$ $\quad L(x) = -x^2 + 5x + 3$

Solution

$T(x) = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 2^2 - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

$K(x) = 2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{7}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{7}{2}\right] = 2[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}]$

$L(x) = -x^2 + 5x + 3 = -(x^2 - 5x - 3) = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\right] = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 3\right]$

$= -[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}]$

b- Factorisation d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = a[(x+\alpha)^2 + \beta]$ l'écriture de $P(x)$ sous la forme canonique .

- Si $\beta > 0$, alors $P(x)$ n'est pas factorisable et donc n'admet pas de zéro.
- Si $\beta < 0$, alors $P(x)$ est factorisable et admet deux zéros.
- Si $\beta = 0$, alors $P(x)$ admet un seul zéro. (Zéro double)

Exercice de fixation

En utilisant la forme canonique, factorise chacun des polynômes P et Q tels que :
$P(x) = x^2 - 5x + 4$ et $Q(x) = 4x^2 + 16x + 12$

Solution

$P(x) = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (x-1)(x-4)$

$Q(x) = 4x^2 + 16x + 12 = 4(x^2 + 4x + 3) = 4[(x+2)^2 - (2)^2 + 3] = 4[(x+2)^2 - 1]$

$= 4(x+3)(x+1)$

2- Etude du signe d'un polynôme du second degré

. Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

Pour tout nombres réels a et b tels que : $a \neq 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		*Signe de* $-a$	0	*signe de* a	

Exercices de fixation

Etudions le signe de $-2x+2$

Soultion

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	

On a donc : pour tout x appartenant à $]-\infty;1[$, $x-1>0$

pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$, $x-1<0$

pour $x=1, x-1=0$

b. **Signe de ax^2+bx+c**

Méthode

Soit $A(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ pour étudier le signe de $A(x)$ on peut utiliser sa forme canonique.

Exercices de fixation

Etudions le signe de $Q(x)=x^2-x-2$

Solution

On a : $Q(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

$=(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\left(x-\frac{4}{2}\right)\left(x+\frac{2}{2}\right)=(x-2)(x+1)$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : pour tout x appartenant à $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $Q(x)>0$

pour tout x appartenant à $]-1;2[$, $Q(x)<0$

pour x appartenant $\{-1;2\}$, $Q(x)=0$

Exercice de fixation

Etudions le signe de $R(x)=-x^2+x-2$

Solution

On a : $R(x)=-x^2+x-2=-(x^2-x+2)=-[(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=-[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}]$

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $(x-\frac{1}{2})^2>0$ et $\frac{7}{4}>0$, donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $R(x)<0$.

Exercice de fixation

Etudions le signe de $S(x)=-9x^2+6x-1$

Solution

On a : $S(x) = -9x^2 + 6x - 1 = -9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = -9[(x - \frac{1}{3})^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}] = -9(x - \frac{1}{3})^2$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $(x - \frac{1}{3})^2 > 0$ et $-9 < 0$, donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $R(x) < 0$.

III. FACTORISATION PAR $x - \alpha$

1- Propriété fondamental

Soit P un polynôme et $\propto$ un nombre réel.
$\propto$ est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre réel x ,
$P(x) = (x - \propto)Q(x)$

Remarque

- $Q(x)$ est appelé quotient de $P(x)$ par $x - \propto$.
- d°Q = d°$P - 1$

Conséquence : un polynôme de degré n a au plus n zéros distincts.

2- Détermination pratique du quotient de $P(x)$ *par* $x - \alpha$

a. Méthode des coefficients indéterminés

Exercices de fixation

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$
1) Vérifions que 1 est un zéro de P.
2) Déterminons le quotient de $P(x)$ par $x - 1$, par la méthode des coefficients indéterminés.

Solution:

1) Je vérifie que 1 est un zéro de P.
$P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$. Donc 1 est un zéro de P.
2) Je détermine les nombres réels a , b *et* c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
On a: $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$
Par identification on a : $a = 2$; $b - a = -1$; $c - b = 1$ et $-c = -2$
On obtient $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = 1 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ et $P(x) = (x - 1)(2x^2 + x + 2)$
Donc le quotient de $P(x)$ par $x - 1$ est $2x^2 + x + 2$

b. Méthode de la division euclidienne

Exercices de fixation

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$

1) Vérifions que 1 est un zéro de P.

2) Déterminons le quotient de $P(x)$ par $x - 1$, par la méthode de la division euclidienne.

Solution

1) Je vérifie que 1 est un zéro de P.

$P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$. Donc 1 est un zéro de P.

2) Je détermine les nombres réels a , b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

On a :

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - x^2 + x - 2 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-2x^3 + 2x^2} \quad\quad\quad & 2x^2 + x + 2 \\
x^2 + x - 2 & \\
\underline{-x^2 + x} \quad\; & \\
2x - 2 & \\
\underline{-2x + 2} & \\
0 \quad &
\end{array}
$$

On obtient $P(x) = (x - 1)(2x^2 + x + 2)$

Donc le quotient de $P(x)$ par $x - 1$ est $2x^2 + x + 2$

IV. FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

On appelle fraction rationnelle, le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes non nuls P et Q.

Remarque :

La fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ a pour ensemble de définition l'ensemble des nombres réels privé des zéros de Q.

Exemples

$\frac{-x^2-2x+3}{x^2-1}$ et $\frac{x+2}{x^2-4x+4}$ sont des fractions rationnelles.

Exercice 1

Soit la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-10x+6}{x^2-4x+3}$

1) Détermine l'ensemble de définition Df de f.
2) a) Vérifie que 1 est un zéro du polynôme $2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$.
   b) Déduis en une écriture de $2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$ en produit de facteurs du premier degré.
3) Montre que : $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$.
4) Pour $x \in D_f$, simplifie $f(x)$.
5) Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Solution

1) Je détermine l'ensemble de définition de f.

$x \in Df \iff x^2 - 4x + 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2^2 + 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq 1$

Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$.

2) a) Je vérifie que 1 est un zéro du numérateur.

On a : $2(1)^3 + 2(1)^2 - 10(1) + 6 = 2 + 2 - 10 + 6 = 0$

Donc 1 est un zéro du numérateur.

b)

On a :
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 + 4x - 6 \\ 4x^2 - 10x + 6 & \\ \underline{-4x^2 + 4x} \qquad & \\ -6x + 6 & \\ \underline{6x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi : $2x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(2x^2 + 4x - 6)$

On a aussi : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2[(x+1)^2 - 1^2 - 3]$
$= 2[(x+1)^2 - 4] = 2[(x+1)^2 - 2^2]$
$= 2(x+1+2)(x+1-2) = 2(x+3)(x-1)$

On obtient donc : $2x^3 - x^2 + x - 2 = 2(x-1)^2(x+3)$

3) Je montre que $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$.

On a : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, donc $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$

4) Je simplifie $f(x)$.

On a :

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$ $f(x) = \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-3)}$

5) J'étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty\,; -3[\cup]1\,;3[$, $f(x) < 0$
Pour tout $x \in]-3\,;1[\cup]3, +\infty\,[$, $f(x) > 0$
Pour $x = -3$, $f(x) = 0$

Exercice 2 : On donne la fraction rationnelle G définie par : $G(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x-3}$

Ecris la fraction rationnelle G sous la forme $G(x) = ax + b + \frac{22}{x-3}$

Solution

On a la division euclidienne suivante :

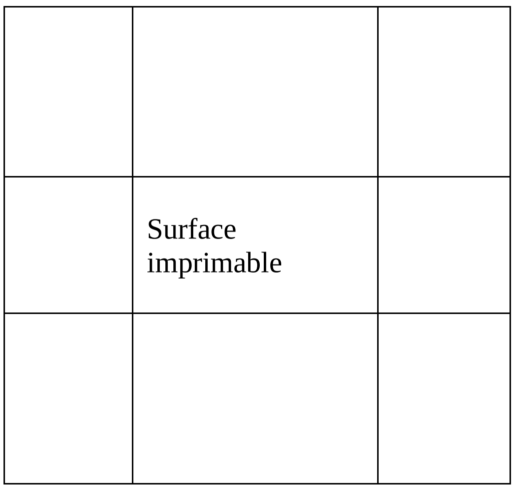
$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - x - 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^2 + 9x} & 3x + 8 \\ 8x - 2 & \\ \underline{-8x + 24} & \\ 22 & \end{array}$$

On a donc : $G\,(x) = 3\,x + 8 + \frac{22}{x-3}$
D'où, $a = 3, b = 8$ et $c = 22$.

C- SITUATION COMPLEXE

Pour la fête de saint valentin, M. INAGO souhaite faire plaisir à sa femme en lui offrant une carte de saint valentin. Il décide donc d'imprimer sur du papier photo une carte importée sur un site internet, le papier est de forme carrée de côté x avec x compris entre 9 cm et 20 cm. Il souhaite cependant laisser une marge de 3 cm en haut et en bas du papier et une marge de 2 cm à gauche et à droite. Son fils en classe de seconde qui est à côté de lui souhaite déterminer les dimensions du papier photo afin que l'aire de la surface imprimable soit de 24 cm^2. (Voir la figure ci-dessous)

A l'aide d'une production argumentée, réponds à la préoccupation du fils de INAGO.



Solution
Ce problème porte sur les polynômes
Pour déterminer les dimensions de la photo ;
Je détermine les dimensions et calculer l'aire $A(x)$ de la partie imprimable
Je résous l'équation $A(x) = 24$
JE déduis les dimensions a partir des contraintes

Les dimensions de la partie imprimable en fonction de x :

la partie imprimable est un rectangle de longueur $x - 4$ et de largeur $x - 6$

son aire $A(x) = (x-6)(x-4)$.
Je résous l'équation $A(x) = 24$

Si l'aire de la surface imprimable est 24 cm², alors on a : $(x-6)(x-4) = 24$.

$$\begin{aligned}(x-6)(x-4) = 24 &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 24\\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x-10) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 10\end{aligned}$$

Comme x est compris entre 9 et 20, alors $x = 10$.

le papier photo doit être un carré de coté 10 cm pour que l'aire de la surface imprimable soit égale à 24 cm².

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit a, b et c des nombres réels. Détermine a, b et c pour que les polynômes
$P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ et $Q(x) = ax^2 + (1-b)x + c$ soient égaux.

Solution

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ 1 - b = -3 \\ C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ C = 2 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère le polynôme $P(x) = 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2$.,
1-Ecis $P(x)$ sous la façon développée, réduite et ordonnée sous la forme
2-Détermine les nombres b_3, b_2, b_1 et b_0 tels que : $P(x) = b_3x^3 + b_2(x+1)^2 + b_1(x+1) + b_0$.

Solution

- $$\begin{aligned}P(x) &= 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2\\ &= 2x - x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 3 + 2x^2\\ &= -x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 2x^2 + 2x + 4x - 3\\ &= 4x^3 - 3x^2 + 6x - 3.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}P(x) &= b_3x^3 + b_2(x+1)^2 + b_1(x+1) + b_0\\ &= b_3x^3 + b_2(x^2 + 2x + 1) + b_1x + b_1 + b_0\\ &= b_3x^3 + b_2x^2 + (b_1 + 2b_2)x + b_2 + b_1 + b_0\end{aligned}$$

  Cette écriture de $P(x)$ étant unique, on a par identification

  $$\begin{cases} b_3 = 4 \\ b_2 = -3 \\ b_1 + 2b_2 = 6 \\ b_2 + b_1 + b_0 = -3 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} b_3 = 4 \\ b_2 = -3 \\ b_1 = 12 \\ b_0 = -12 \end{cases}$$

  Donc $P(x) = 4x^3 - 3(x+1)^2 + 12(x+1) - 12$.

Exercice 3

Ecris chacun des polynômes suivants sous la forme de produit de polynômes du premier degré.

$R(x) = x^3 - 27$ $\quad$ $S(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Solution

$R(x) = x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

Factorisons si possible $x^2 + 3x + 9$

$$x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 9$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$$

Donc $x^2 + 3x + 9$ n'est pas factorisable par conséquent $R(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

S(x) = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3 = (x-2)^3$

Exercice 4

En utilisant la forme canonique, factorise chacun des polynômes suivants si cela est possible.

P(x) = $x^2 + 4x + 2$ Q(x) = $2x^2 - 4x + 8$ R(x) = $x^2 - 2x + 5$

Solution

$P(x) = x^2 + 4x + 2$ $= (x+2)^2 - 4 + 2$ $= (x+2)^2 - 2$ $= (x+2)^2 - (\sqrt{2})^2$ $= (x + 2 + \sqrt{2})\ (x + 2 - \sqrt{2})$	$Q(x) = 2x^2 - 4x + 8$ $= 2(x^2 - 2x + 4)$ $= 2[(x^2-1)^2 - 1 + 4]$ $= 2[(x^2-1)^2 + 3]$ Donc le polynôme Q n'est pas factorisable	$R(x) = x^2 - 2x + 5$ $= (x-1)^2 - 1 + 5$ $= (x-1)^2 + 4$ Donc le polynôme R n'est pas factorisable

Exercice 5

$C\ (x\ )$Etudie le signe de chacun des polynômes suivants :

$A(x) = 5x - 2$; $B(x) = -4x + 3$; $C(x) = (x-3)(4x+2)$;
$D(x) = (2-x)(3-5x)$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{2}{5}\right]$, $A(x) \leq 0$

Pour $x \in \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $A(x) > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$, $C(x) \geq 0$

Pour $x \in \left]\frac{-1}{2}; 3\right[$, $C(x) < 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$, $B(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3 - 5x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup [2; +\infty[$, $D(x) \geq 0$

Pour $x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[, B(x) < 0$	Pour $x \in \left]\frac{5}{3}; 2\right[, D(x) < 0$

Exercice 6

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants :

E (x) = $x^2 + x - 2$; F(x) = $-3x^2 - 3x + 18$.

E (x) = $x^2 + x - 2$

$= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$= (x + 2)(x - 1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[, E(x) \geq 0$

Pour $x \in]-2; 1[, C(x) < 0$

F(x) = $-3x^2 - 3x + 18$.

F(x) = $-3(x^2 + x - 6)$

$= -3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$

$= -3\,(x + 3)(x - 2)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-3(x + 3)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[, E(x) \leq 0$

Pour $x \in]-3; 2[, C(x) > 0$

Exercice 7

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1. Justifie que $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$.
2. Détermine les zéros de P.

Solution

1. Justifions que $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$.

Développons $(2x - 1)(x + 1)(x + 3) = (2x - 1)(x^2 + 4x + 3)$

$$= 2x^3 + 8x^2 + 6x - x^2 - 4x - 3x - 3$$
$$= 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$
$$= P(x)$$

Donc $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$.

2 Déterminons les zéros de P.

α est un zéro de P si et seulement α est solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0.$

$\Leftrightarrow (2x - 1) = 0 \; ou \; (x + 1) = 0 \; ou \; (x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \;\; ou \;\; x = -1 \;\; ou \; x = -$

Les zéros de P sont $\frac{1}{2}; \; -1 \;\; et - 3$.

Exercice 8

On considère le polynôme P défini par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

1. Justifie que $\frac{1}{2}$ est un zéro de P.
2. Ecris sous forme canonique le polynôme Q défini par $Q(x) = x^2 - x - 2$.
3. En utilisant la question 2, factorise $Q(x)$.
4. Vérifie que $P(x) = (2x - 1)Q(x)$
5. Détermine les zéros de P.

Solution

1. Justifions que $\frac{1}{2}$ est un zéro de P.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times (\tfrac{1}{2})^3 - 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

2.Ecris sous forme canonique le polynôme Q défini par $Q(x) = x^2 - x - 2$

$Q(x) = (x-1)^2 - 1 - 2$

$Q(x) = (x-1)^2 - 3$

$Q(x) = (x-1)^2 - (\sqrt{3})^2$

$Q(x) = (x - 1 - (\sqrt{3}))\,(x - 1 + (\sqrt{3}))$

2 Vérifions que $P(x) = (2x - 1)Q(x)$

$(2x-1)(x^2 - x - 2.) = 2x^3 - 2x^2 - 4x - x^2 + x + 2.$

$.= 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = P(x)$

3 Détermine les zéros de P.

α est un zéro de P si et seulement α est solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x - 1 - (\sqrt{3}))\,(x - 1 + (\sqrt{3}))=0$

$\Leftrightarrow (2x-1) = 0\,;ou\ \ x - 1 - (\sqrt{3})) = 0\,;ou\ (x - 1 + (\sqrt{3}))=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,;ou\ \ x = 1 + (\sqrt{3}))\,;ou\ (x = 1 - (\sqrt{3}))$

Les zéros de P. sont : $\frac{1}{2}$; $1 + (\sqrt{3}))\ et\ 1\ - (\sqrt{3}))$

Exercice 9

On donne $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$.

1. Vérifie que $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$
2. Démontre que le quotient de $P(x)$ par $x - \frac{3}{2}$ est $-x^2 + 4x - 6$
3. Ecris, si possible, le quotient sous forme de produit de polynômes de 1er degré.
4. Etudie le signe de $P(x)$ suivants les valeurs de x.
5. Sans calculer, donne le signe des nombres suivants : $P(4000)$, $P(\sqrt{3})$, $P(-2008)$.

Solution

1. Vérifie que $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$

   Calculons $P\left(\frac{3}{2}\right)$

   $P\left(\frac{3}{2}\right) = -2(\frac{3}{2})\ +\ 7\times(\frac{3}{2})^2 - 12\times\frac{3}{2} + 9$

   $P\left(\frac{3}{2}\right) = -2\frac{27}{8} +\ 7\times\frac{9}{4} - \frac{36}{2} + 9$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{4} + \frac{63}{4}$ - 18 +9

$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{36}{4} - 9 = 0$ Alors $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$

2. Démontrons que le quotient de $P(x)$ par $x - \frac{3}{2}$ est $-x^2 + 4x - 6$

   dévélopons

   par $\left(x - \frac{3}{2}\right)(-2x^2 + 4x - 6) = -2x^3 + 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 9$

   $= -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9 = p(x)$

3. Ecrivons, si possible, le quotient sous forme de produit de polynômes de 1er degré.

Posons $Q(x) = -2x^2 + 4x - 6$

$Q(x) = -2[x^2 - 2x + 3]$

$Q(x) = -2[(x-1)^2 - 1 + 3]$

$Q(x) = -2[(x-1)^2 + 2]$

4. Etudions le signe de $P(x)$ suivants les valeurs de x.

$P(x) = -2(x - \frac{3}{2})[(x-1)^2 + 2]$; le signe donc de P est le signe contraire à celui de $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ car $-2[(x-1)^2 + 2] < 0$.

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$**,** $\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0$ $donc$ $P(x) < 0$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$**,** $\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$ $donc$ $P(x) > 0$

5 .Sans calculer, donne le signe des nombres suivants : $P(4000)$, $P(\sqrt{3})$, $P(-2008)$

$P(4000) < 0$ car $\mathbf{4000} \in \left]\frac{3}{2}\ ; +\infty\right[$

, $P(\sqrt{3}) < 0$ car$\sqrt{3} \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$P(-2008) > 0$ car $\mathbf{-2008} \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

Exercice 10

On donne la fraction rationnelle G définie par : $G(x) = \frac{-2x^3+3x^2-x-2}{x^2-3}$

Ecris la fraction rationnelle G sous la forme $G(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-3}$

Solution

Déterminons les nombres réels tel que

$G(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{(ax+b)(x^2-3)}{x^2-3} + \frac{cx+d}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{(ax+b)(x^2-3)+Cx+d)}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{ax^3-3ax+bx^2-3b+cx+d}{x^2-3} = \frac{ax^3+bx^2+(-3a+c)x-3b+d}{x^2-3}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ -3a + c = -1 \end{cases} \text{ et } -3b + d = -2$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \text{ et } d = 7$$