MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 08 heures Code :

COMPETENCE 3	Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan
THEME 1	Géométrie du Plan

LEÇON : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un professeur de mathématiques d'une classe de seconde C propose l'activité suivante à ses élèves lors d'un cours. Pour cela, il forme des équipes de deux personnes.
Dans chaque équipe, l'une des personnes dispose de la figure 1 et l'autre de la figure 2.
La personne qui a la figure 1 donne des informations à l'autre pour placer les points P et Q en utilisant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

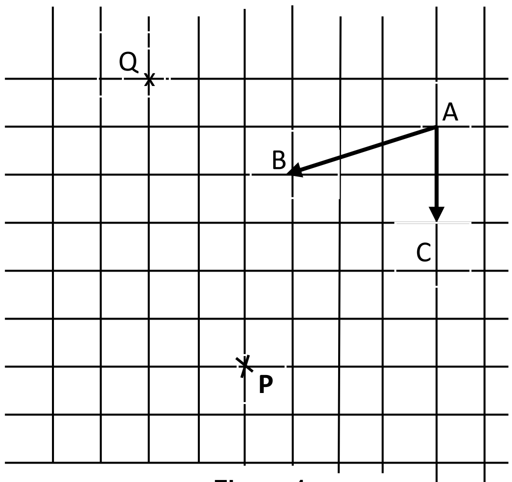


Figure 1

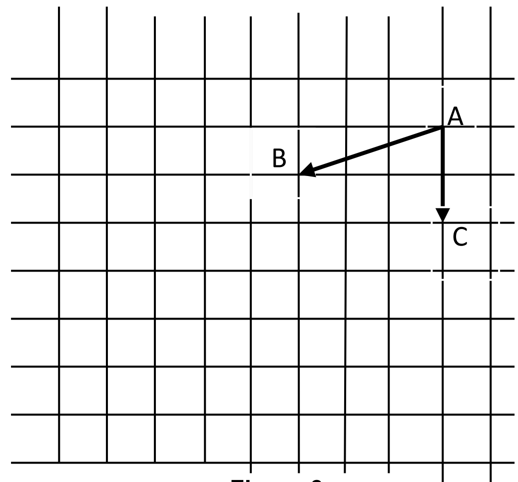


Figure 2

Un bonus est attribué à chaque équipe qui réussit l'activité.
Tous les élèves de cette classe veulent participer. Ils décident alors de faire, par 2pes de deux, des recherches sur les combinaisons linéaires de vecteurs.

B. CONTENU DE LA LECON

I-VECTEURS

1. Définition et propriétés

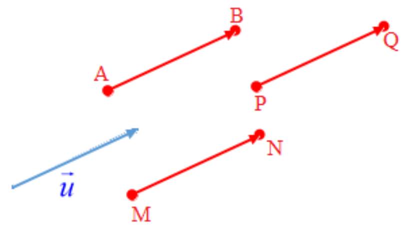
a) Définition et notation

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par le couple de points (A ; B).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :
- direction celle de la droite (AB) ;
- sens celui du couple $(A;B)$;
- longueur celle du segment $[AB]$.

On appelle **<u>plan vectoriel</u>** l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

<u>Remarque</u>
- Sur la figure ci-dessous, on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

- Les couples (A, B) , (M, N) et (P, Q) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Un vecteur a une infinité de représentants



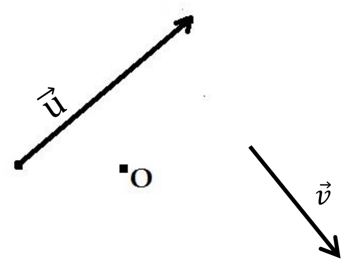
b) Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$ du plan vectoriel $\mathcal{V}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exercice de fixation

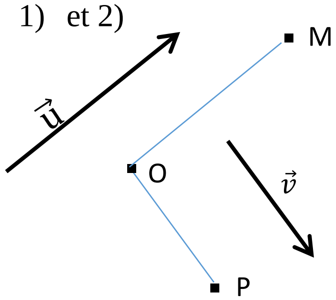
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,et le point O ci-contre.

1. Construis le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
2. Construis un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$



Solution :

1) et 2)



2- Norme d'un vecteur

a) Définition

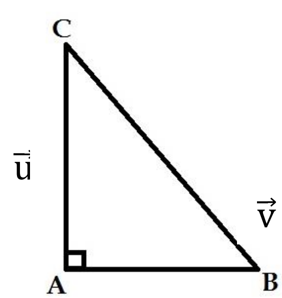
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$, la distance AB où $(A; B)$ est un représentant de $\vec{u}$.
On la note : $\|\vec{u}\|$.
On a : $\|\vec{u}\| = AB$.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A avec AC = 4 et AB = 3.

On pose $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$.

Détermine $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$



- Norme du vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = AC = 4$
- Norme du vecteur $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = AB = 3$
- Norme du vecteur $\vec{w}$:

  $\|\vec{w}\| = \sqrt{AB^2 + AC^2} \quad = \sqrt{9+16} \quad = \sqrt{25} = 5$

<u>Remarque</u>

Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.

b) Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs ; k est un nombre réel. On a :

- $\|\vec{u}\| \geq 0$
- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.
- $\| \vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice de fixation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 0{,}5$

Détermine $\|-\vec{u}\|$ et encadre $\| \vec{u} + \vec{v}\|$.

Solution

- $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 2$.
- On a : $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ donc $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq 2 + 0{,}5$ c'est-à-dire :

  $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq 2{,}5$

3-Vecteur unitaire

a) Définition

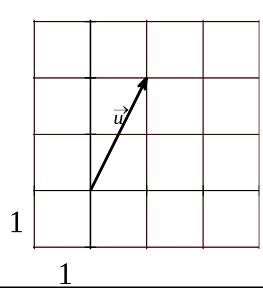
On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

b) Propriété

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est un vecteur unitaire.

Exercice de fixation

	1) Calcule $\|\vec{u}\|$. 2) Justifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}$ est un vecteur unitaire

Solution

1. En exploitant le quadrillage, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

2. D'après la propriété précédente le vecteur $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur unitaire c'est-à-dire $\frac{\vec{u}}{\sqrt{5}}$ est unitaire.

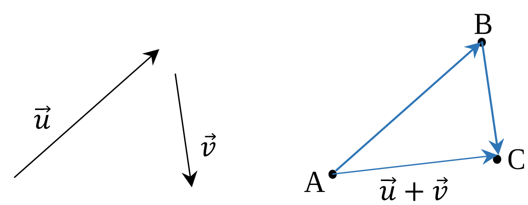
4 -Calculs vectoriels

a) Somme de vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

On pose $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est un vecteur de représentant (A, C).



b) Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par λ est un vecteur noté $\lambda\,\vec{u}$. Ce vecteur a pour :

- direction celle de $\vec{u}$
- sens celui de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, celui de $-\vec{u}$ si $\lambda < 0$
- norme $|\lambda|\|\vec{u}\|$.

♦ $\lambda < 0$ ♦ $\lambda > 0$

On admet que pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel λ,

- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- $0.\vec{u} = \vec{0}$

Conséquence :

λ étant un réel et $\vec{u}$ un vecteur,

$\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, sont représentés deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$.
Représente les vecteurs -3$\vec{u}$; 2$\vec{v}$ et $-\frac{3}{2}\vec{u}$.

Solution :

Remarque :
$\vec{v}$ étant un vecteur
$\vec{v} + \vec{v}$ est noté 2$\vec{v}$.

c) Propriétés

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombres réels λ et μ on a :

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(3) $\vec{u} + (\vec{0}) = \vec{u}$
(4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
(5) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
(6) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
(7) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
(8) $1\vec{u} = \vec{u}$

Exercice de fixation

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs du plan. Simplifie l'écriture des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$\vec{a} = 8\vec{u} - 2\vec{v} + 6\vec{w} + 6\vec{v} - 2(\vec{u} + 3\vec{w})$

$\vec{b} = 2\vec{u} - 3(4\vec{v} - 2\vec{w}) - 5(3\vec{u} + 2\vec{v})$

Solution :

$\vec{a} = 8\vec{u} - 2\vec{v} + 6\vec{w} + 6\vec{v} - 2\vec{u} - 6\vec{w}$

$\vec{a} = 6\vec{u} + 4\vec{v}$

$\vec{b} = 2\vec{u} - 12\vec{v} + 6\vec{w} - 15\vec{u} - 10\vec{v}$

$\vec{b} = - 13\vec{u} - 22\vec{v} + 6\vec{w}$

5 -Combinaisons linéaires

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, tout vecteur de la forme : $\boldsymbol{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$, où λ et μ sont des nombres réels.
λ et μ sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

<u>Exemple</u> : $2\vec{u} - 3\vec{v}$; $\frac{1}{4}\vec{u} + \vec{v}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice de fixation

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs du plan tels que $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ecris $\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution

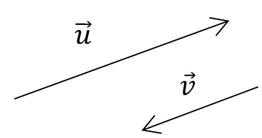
$$\begin{matrix} \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{u} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b} \end{cases}$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

6-Vecteurs colinéaires

a-Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si l'un d'eux est le vecteur nul ou s'ils ont la même direction.



<u>Exemple</u>

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

b- Propriétés

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$).

Exercice de fixation

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases}$

Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution :

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ 2\,\vec{u} - 2\vec{v} = -2\vec{w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Propriété 2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, λ et μ deux nombres réels. Les deux énoncés suivants sont équivalents.
(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires
(2) $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \implies \lambda = \mu = 0$.

Exercice de fixation

Soit A, B et C sont trois points non alignés. Détermine les nombres réels λ et μ tels que $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Solution :

A, B et C sont trois points non alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

Donc $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une combinaison linéaire de ces deux vecteurs qui soit nulle sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Exercice de fixation

Soit L, M et P trois points du plan tels que $\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{MP}$

Justifie que $\overrightarrow{ML}$ *et* $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires.

Solution :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{MP} &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{MP} = \vec{0}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LP}) = \vec{0}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{LP} = \vec{0}\\ &\Rightarrow -2\overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{LP} = \vec{0}\end{aligned}$$

Il existe une combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ avec des coefficients non tous nuls.

Donc $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires.

Remarque

La colinéarité permet de démontrer que des droites sont parallèles ou que des points sont alignés.

Exemple : dans l'exercice précédent, les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires. Alors les points M, L et P sont alignés.

7- Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Propriété

ABC est triangle. Le centre de gravité du triangle ABC est l'unique point G du plan tel que :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice de fixation

Soit ABC un triangle et M un point du plan. On considère les points A', B' et C' tels que :

$\overrightarrow{MA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

Démontre que M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

Solution :

On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

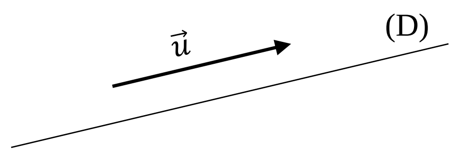
$$= \frac{3}{2} \times \vec{0}$$

$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}$. Donc M' est le centre de gravité de A'B'C'.

8- Vecteur directeur d'une droite

- **Définition**

On appelle vecteur directeur d'une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la même direction que (D).



- **Remarques**

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (D), alors pour nombre réel non nul k, le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.

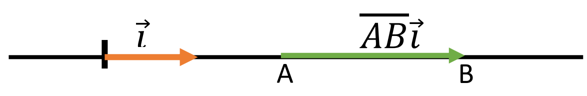
Exemple

Si A et B sont deux points distincts d'une droite (D) alors les vecteurs directeurs de (D) sont de la forme $k\,\overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel non nul.

9 - MESURE ALGEBRIQUE

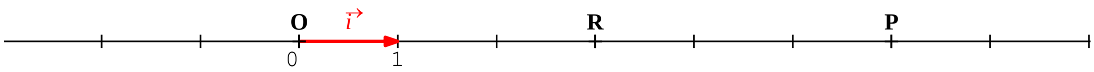
a-Définition

Soit (D) une droite orientée de repère (O ; $\vec{\imath}$) tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$.
A et B étant deux points de (D), on appelle **mesure algébrique** de (A, B) relativement au repère (O ; $\vec{\imath}$) , l'unique nombre réel, noté $\overline{AB}$, tel que : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\vec{\imath}$.



Exemple

Soit (D) une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$.



$\overrightarrow{RP} = 3\vec{\imath}$, donc $\overline{RP}$ = 3.

$\overrightarrow{RO} = -3\vec{\imath}$, donc $\overline{RO}$ = – 3 .

$\overrightarrow{OP} = 6\vec{\imath}$, donc $\overline{OP}$ = 6.

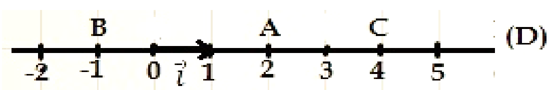
<u>Remarque</u>

La mesure algébrique de deux points peut être négative, positive ou nulle.

Exercice de fixation

Sur une droite (D) orientée par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$. Place trois points A, B et C tels quels que $\overline{AB}$ = -3 ; $\overline{AC}$= 2

Solution :



1.1 Propriétés

Les propriétés suivantes sont les conséquences immédiates de la définition.
Soit (D) une droite orientée de repère (O ; $\vec{\imath}$), tel que $\|\vec{\imath}\|$ = 1.
Pour tous points A, B, C de (D), pour tout nombre réel λ, on a :

(1) $|\overline{AB}| = AB$
(2) $\overline{BA} = -\overline{AB}$
(3) Lorsque A et B sont distincts :
- $\overline{AB} = AB$ si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de même sens ;
- $\overline{AB} = -AB$ si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de sens contraires

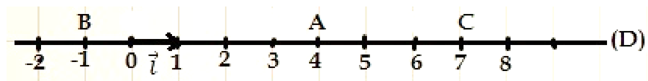
(4) $\overline{AB} = 0 \iff A = B$
(5) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff \overline{AC} = \lambda\overline{AB}$
(6) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Relation de Chasles)

<u>Remarque</u>

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si A, B et C sont alignés.
AB + BC = AC n'est vérifié que si B ∈ [AC].

Exercice de fixation

Sur le graphique ci-dessous ; A,B et C sont des points d'une droite (D) graduée de repère (O ; $\vec{\imath}$).



Détermine :$\overline{AB}$; $\overline{CA}$; $\overline{AB} \times \overline{AC}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$

Solution

$\overline{AB} = -5$; $\overline{CA} = -3$; $\overline{AB} \times \overline{AC}$ = -5 × 3 = -15 ; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

II -BASES ET REPERES

1 Bases de $\mathcal{V}$:

Définitions

Tout couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires est appelé une **base** de $\mathcal{V}$.

Exemple

ABC est un triangle.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Remarques

Soit ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est une base de $\mathcal{V}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$), alors ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est une base orthogonale de $\mathcal{V}$.
- Si de plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

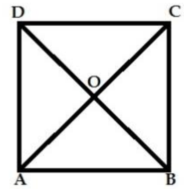
2- Coordonnées de vecteur

a -Propriété fondamentale et Définition

- Soit ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) une base de $\mathcal{V}$.. Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un et un seul couple de nombres réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
- Soit ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) une base de ϑ et $\vec{u}$ un vecteur.
  Le seul couple de nombres réels $(x; y)$ vérifiant $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est appelé le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit la figure ci-contre où ABCD est un carré.



Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OB}$

1) Dans la base $(\overrightarrow{OC}\ ,\overrightarrow{OD})$
2) Dans la base $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC})$

Solution

1) $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OC}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{OC}\ ,\overrightarrow{OD})$
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ d'où $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{OC}\ ,\overrightarrow{OD})$
   $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OD}$ d'où $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{OC}\ ,\overrightarrow{OD})$

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC})$
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC})$
   $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-½\end{pmatrix}$ dans $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC})$

b- Propriété

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs.

- Si on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :
  $(\vec{u}+\vec{u}')\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et $\lambda\,\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{u}'$ et $\vec{u}-2\vec{u}'$.

Solution

$(\vec{u}+\vec{u}')\begin{pmatrix}1+0\\2-6\end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{u}+\vec{u}')\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.

$(\vec{u}-2\vec{u}')\begin{pmatrix}1-2\times0\\2-2\times(-6)\end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{u}-2\vec{u}')\begin{pmatrix}1\\14\end{pmatrix}$.

3-Expression de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice de fixation

Soit ($\vec{a}$, $\vec{b}$) une base orthonormée , $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{u}\binom{-4}{2}$.

Calcule $\|\vec{u}\|$.

Solution

Dans la base orthonormée ($\vec{a}$, $\vec{b}$) , $\vec{u}\binom{-4}{2}$ donc

$\|\vec{u}\|= \sqrt{(-4^2)+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

D'où $\|\vec{u}\|=2\sqrt{5}$.

Remarque

Cette propriété n'est applicable que dans une base orthonormée.

4 - Déterminant de deux vecteurs

a) Définition

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.
On appelle **déterminant** de $(\vec{u},\vec{u}')$ relativement à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le nombre réel $xy'-yx'$.
On le note : **det**$(\vec{u},\vec{u}')$.
On écrit : **det**$(\vec{u},\vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-yx'$.

Exemple
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.
$\det(\vec{\imath}+\vec{\jmath}, -\vec{\imath}+2\vec{\jmath}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 1\times(-1) = 2+1 = 3.$

b) Propriété

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul**.**

Exercice de fixation

Le plan vectoriel ϑ est muni d'une base orthonormée ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{1,5}$ sont deux vecteurs de ϑ.

Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1,5 \end{vmatrix} = 2\times 1,5 - 1\times 3 = 3-3 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ils forment donc une base de ϑ.

c- Conséquence.

Un couple de vecteurs de ϑ est une base si et seulement son déterminant dans une base de ϑ est non nul.

Exercice de fixation

Le plan vectoriel ϑ est muni d'une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$ sont deux vecteurs de ϑ.

Justifie que ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est une base de ϑ.

Solution

dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1.$

dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) $\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Par suite ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est une base de ϑ.

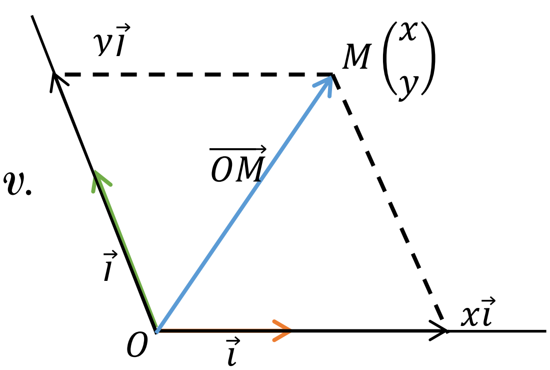
5 - Repères du plan

a) Définition

On appelle repère du plan :

- un triplet (O, I, J) de points non alignés ;
- un triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.

Le point O est appelé origine du repère.

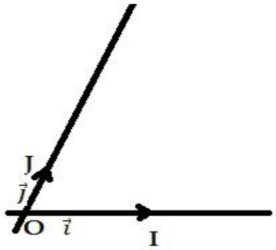


__Remarque__

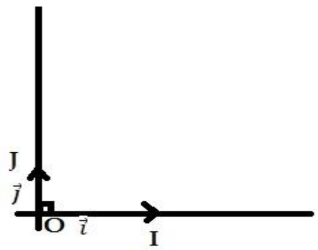
- Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit orthonormé si et seulement si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé ;
- Les coordonnées d'un vecteur se déterminent dans une base, tandis que celles d'un point se déterminent dans un repère.
- Le repère peut être quelconque, orthogonal ou orthonormal.

<u>Exemples de repères</u> :

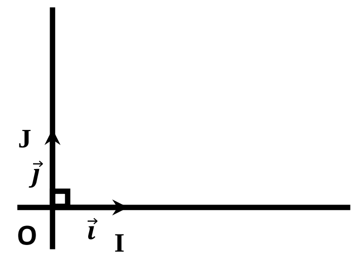
Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormal



- $(O, \vec{\imath})$ est un repère de l'axe des abscisses (OI), $(O, \vec{j})$ est le repère de l'axe des ordonnées (OJ).

  <u>Remarque</u> : un repère orthonormal est aussi appelé repère orthonormé

b) Calcul dans un repère

<u>Propriété</u>

Dans un repère (O, I, J), on donne les points

A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$. On a :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le point M milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Le point G centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3} ; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

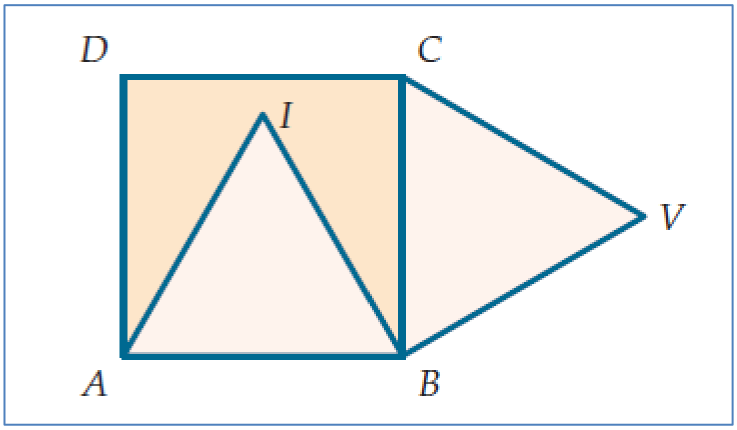
On donne les points A(-4 ;1) ; B(2 ;-3) et C(3 ;4) et I milieu du segment [BC]

1) Détermine les coordonnées de I.
2) Détermine les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
3) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IG}$.

Solution

1) I$\left(\frac{2+3}{2} ; \frac{-3+4}{2}\right)$; I$\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$
2) G$\left(\frac{-4+2+3}{3} ; \frac{1-3+4}{3}\right)$; G$\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$
3) $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

C. SITUATION COMPLEXE



À l'occasion d'un concours de logo organisé dans leur établissement, des élèves d'une classe de 5ième du Lycée Moderne de Jeunes Filles de Yopougon ont été déclarées lauréates grâce à la figure ci-dessus qu'elles ont produite. Sur cette figure, ABCD est un carré, AIB et BCV sont des triangles équilatéraux.
Selon le Jury, ces jeunes filles ont remporté le premier prix grâce à l'harmonie des couleurs, mais surtout grâce à l'exactitude de leur figure qui, en conformité avec les indications données, présente les trois points D, I, et V alignés.

Un groupe concurrent, pas très convaincu de l'alignement de ces trois points, veut en avoir le cœur net. Il sollicite ton aide.

En tant qu'élève de 2ndeC, en t'appuyant sur tes connaissances en mathématiques sur les vecteurs, prouve qu'au-delà du tracé de la droite (DV), les points D, I, et V sont bels et bien alignés.

Solution

Pour résoudre cet exercice, nous allons utiliser les connaissances sur les vecteurs et points du plan.

Nous effectuerons des calculs de coordonnées de points et de vecteurs puis de déterminant pour déduire l'alignement de points.

ABCD est un carré. Soit $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$. Posons AB = 1.

Dans le repère orthonormé $(A, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$, déterminons les coordonnées des points D, I, et V.

- On a : $D(0; 1)$.
- Soit H le projeté orthogonal de I sur (AB), et H' le projeté orthogonal de I sur (AD).
  AIB étant équilatéral, H est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- D'autre part, [IH] est la hauteur du triangle équilatéral ABI, donc $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} = AH'$

Par conséquent on a $I(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- Soit K le projeté orthogonal de V sur (AB), K' le projeté orthogonal de V sur (AD), et Q le projeté orthogonal de V sur (BC).

  On a AK = AB + BK = AB + VQ = 1 + $\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Et AK'= $\frac{1}{2}AD$, donc on a $V(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$

- On obtient : $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DV}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DV}) = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2}) - [\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1] = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ *et* $\overrightarrow{DV}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points D, I, et V sont bel et bien alignés.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

ABC est un triangle. D et E deux points du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

2) Démontrer que (BE) // (CD).

Solution :

1) $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

2) On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

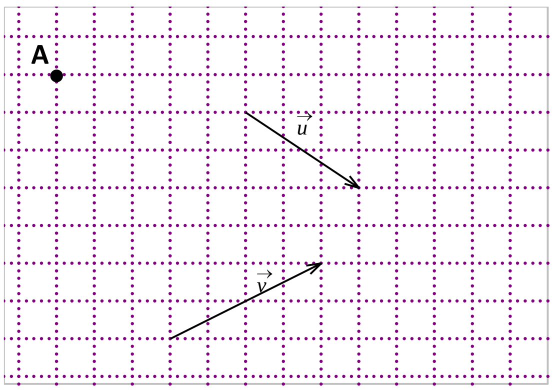
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

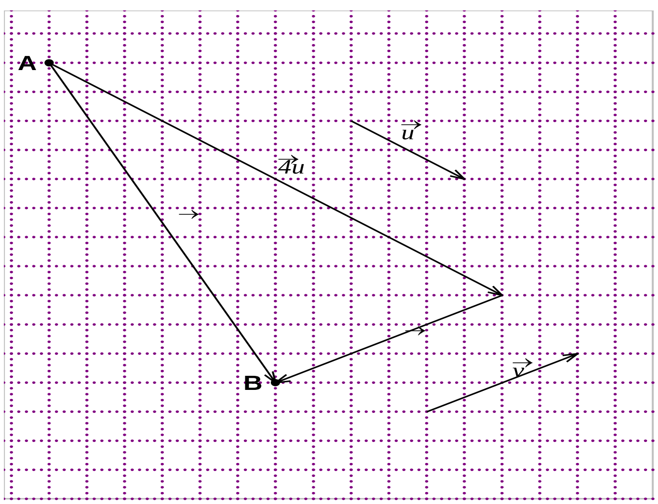
Donc (BE) // (DC).

Exercice 2

Sur une feuille à carreaux, reproduis la figure ci-dessous, puis construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$



Solution :



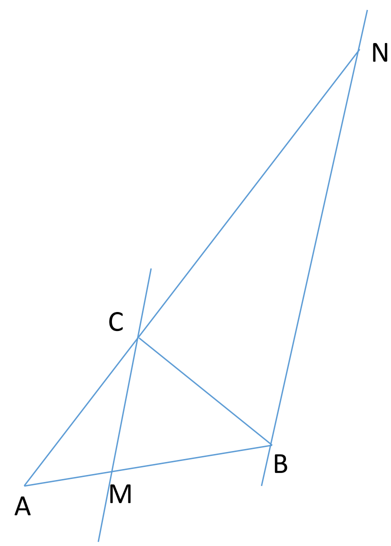
Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque.

1) Construis les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$
2) Démontre que (BN) et (MC) sont parallèles.

Solution :

1) (Voir figure ci-contre)



2) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{3}(3\overrightarrow{AC}) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NB} \Longrightarrow$ (CM) // (NB)

2. Exercices de renforcement

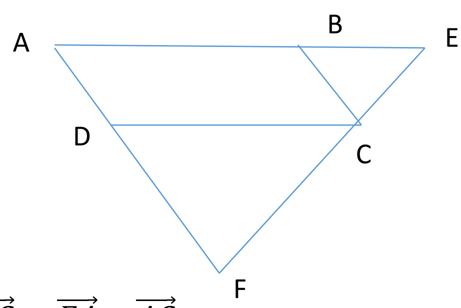
Exercice 4

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2) a-A l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b-Démontre que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires et en déduire que E, C et F sont alignés.

Solution :

1)



2) a- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{EC} = \left(\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} + AB\right) + \overrightarrow{AD}$; ABCD étant un parallélogramme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{EC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF})$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

b-Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\binom{-1}{2}$ et det$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CF})$ =2$(\frac{-1}{2}) - (-1) = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EC}\ et\ \overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, par conséquent les points E, C, et F sont alignés.

Exercice 5

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points A$\binom{2}{3}$; B$\binom{4}{1}$ et C$\binom{5}{4}$.

a) Démontrer que (OA) et (BC) ne sont pas parallèles.
b) Les points O, A et B sont-ils alignés ?
c) Trouver x tel que le point M(25 ; x) soit aligné avec A et B.

Solution :

a) Dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on a $\overrightarrow{OA}\binom{2}{3}$, $\overrightarrow{BC}\binom{1}{3}$ et det$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC})$ = 2×3 – 3×1 = 3, et 3$\neq$ 0 donc les droites (OA) et (BC) ne sont pas parallèles.

b) Dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on a $\overrightarrow{OA}\binom{2}{3}$,$\overrightarrow{OB}\binom{4}{1}$ et det$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$=2×1 – 3×4 = -10 et -10$\neq$ 0 donc les points O, A et B ne sont pas alignés.

c) M, A, et B sont alignés équivaut à $\overrightarrow{AM}\binom{23}{x-3} et \overrightarrow{AB}\binom{2}{-2}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut à det$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ = 0

Ce qui équivaut à – 46 - 2(x-3) = 0

Ce qui équivaut à x = -20

3. Exercice d’approfondissement

Exercice 6

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. On donne A$\binom{2}{-3}$; B$\binom{-3}{2}$ et C$\binom{3}{2}$

1) a- Calcule les coordonnées du point A’ milieu de [BC].
   b- Calcule les coordonnes de G tel que $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.
   c- Que représente le point G pour le triangle ABC ?

d- Vérifie que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2) Calcule les longueurs OA, OB et OC. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
3) Calcule les coordonnées de H tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Solution :

1) a) $A'\left(\frac{-3+3}{2};\ \frac{2+2}{2}\right) \Leftrightarrow A'(0;\ 2)$

b) $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3}x_{A'} + \frac{1}{3}x_A \\ y_G = \frac{2}{3}y_{A'} + \frac{1}{3}y_A \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 0(\frac{2}{3}) + 2(\frac{1}{3}) \\ y_G = 2(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(-3) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

G est le centre de gravité du triangle ABC.

c) G étant le centre de gravité du triangle ABC, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

d) On donne A$\binom{2}{-3}$; B$\binom{-3}{2}$ et C$\binom{3}{2}$ on a : $OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$OB = \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$$
$$OC = \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

OA = OB = OC, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

3) $H(2 - 3 + 3; -3 + 2 + 2) \Leftrightarrow H(2; 1)$