Terminale D

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures **Code :**

Leçon 12 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 Francs CFA que la promotion a dans sa caisse au premier Janvier 2021.

Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.

Option 1 : le capital placé est augmenté de 2500 Francs CFA à intérêts simples par mois.

Option 2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement.

Le budget de la manifestation étant de 400.000 Francs CFA, le président voudrait connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2022.

Le président veut savoir laquelle des deux options est plus avantageuse.

Les élèves de terminale décident d'aider le président à faire le meilleur placement.

B. CONTENU DU COURS

1. Rappel sur les suites arithmétiques et les suites géométriques

Nature de la suite	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases} ; q \in \mathbb{R}$
Raison	r	q
Caractérisation par une formule explicite	•$u_n = n\,r + u_0$ • Pour tous $n \epsilon \mathbb{N}$ et $p \epsilon \mathbb{N}$, $u_n = (n - p)r + u_p$	•$v_{n+1} = q^n v_0$ • Pour tous $n \epsilon \mathbb{N}$ et $p \epsilon \mathbb{N}$, $v_n = v_p q^{n-p}$

Somme des termes consécutifs	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.	si $q \neq 1$ $alors$ $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$	Si $q \neq 1$ $alors$ $v_p + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$

Exercices de fixation

Exercice 1

1) (u) est une suite arithmétique de raison -3. Détermine une relation entre u_{n+1} et u_n.
2) (v) est une suite géométrique de raison -3. Détermine une relation entre v_{n+1} et v_n .

Solution

1)$u_{n+1} = u_n - 3$
2) $v_{n+1} = -3v_n$

Exercice 2

1) (u) est une suite arithmétique de raison 2 et $u_3 = -5$. Exprime u_n en fonction de n.
2) (v) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et $v_4 = 16$. Exprime v_n en fonction de n.

Solution

1) $u_n = (n-3)r + u_3$
$u_n = 2(n-3) - 5$;
soit : $u_n = 2n - 11$.

2) $v_n = v_4 \times q^{n-4}$
$v_n = 16 \times (-\frac{3}{2})^{n-4}$.

Exercice 3

1. (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 7$.
   Calcule la somme : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$
2. (v) est une suite géométrique de raison -2 et $v_4 = 16$.
   Calcule la somme : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21}$

Solution

1. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$

On a : $u_n = (n-2)r + u_2 = -3(n-2) + 7$; soit : $u_n = -3n + 13$; donc, $u_0 = 13$ et $u_{20} = -47$.

Par suite : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\left(\frac{u_0+u_{20}}{2}\right)$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21(\frac{13-47}{2})$$

Donc : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 21 \times (-17) = -357$

2. $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = v_2(\frac{1-q^{21-2+1}}{1-q})$

On a : $v_n = v_4 \times q^{n-4} = 16 \times (-2)^{n-4}$; donc : $v_2 = 16 \times (-2)^{2-4} = 16 \times (-\frac{1}{2})^2$; soit $v_2 = 4$.

Par suite : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21} = 4\left(\frac{1-(-2)^{20}}{1+2}\right) = \frac{4}{3}(1-(2)^{20})$.

2. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n.

Méthode

Pour démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ (n_0 étant un entier naturel donné), on procède en trois étapes :

• On vérifie que la proposition est vraie lorsque $n = n_0$. (Initialisation)

• On suppose que la proposition est vraie pour un entier $k \geq n_0$ et on démontre qu'elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. (Hérédité)

• On conclut que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. (Conclusion)

Exercice de fixation

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons la proposition : « $u_n < 6$ ».

- Vérifions que la proposition est vraie au rang 0, c'est-à-dire que : $u_0 < 6$.
  On a : $u_0 = -1$. Alors $u_0 < 6$. Donc est vraie la proposition est vraie au rang la proposition est vraie au rang la proposition est vraie au rang 0.
- Soit k un entier naturel tel que $k \geq 0$.
  Supposons que la proposition soit vraie au rang k c'est-à-dire que : $u_k < 6$, démontrons que la proposition est vraie au rang k+1 c'est-à-dire que : $u_{k+1} < 6$.

D'après l'hypothèse de récurrence ci-dessus, $u_k < 6$.

On en déduit que : $\frac{1}{2}u_k < 3$,

$\frac{1}{2}u_k + 3 < 3 + 3$;soit $\frac{1}{2}u_k + 3 < 6$, c'est-à-dire : $u_{k+1} < 6$.

D'où la proposition est vraie au rang k+1 est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

3. Suites croissantes, suites décroissantes

Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels et E son ensemble de définition. On dit que :

- la suite (u_n) est croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement croissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n < u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n > u_{n+1}$.
- la suite (u_n) est constante, lorsque pour tout entier naturel n de E, $u_n = u_{n+1}$.

- la suite (u_n) est monotone, lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

<u>Méthode</u>
Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

a) La méthode algébrique

- On étudie le signe de : $u_{n+1} - u_n$
  - Si pour tout n de E,$u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

- On compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si pour tout entier naturel n de E, $u_n > 0$.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si pour tout n de E, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) La méthode à l'aide d'une fonction

Si $u_n = f(n)$, alors (u_n) a le même sens de variation que la fonction f.
On étudie donc les variations de la fonction f sur I contenant E.

- Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur I, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Utilisation du raisonnement par récurrence

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>
Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2 + 3n$. Démontre que la suite (w_n) est croissante.

Solution
Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n)$
$w_{n+1} - w_n = 2n + 4$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n > 0$.
Par suite, la suite (w_n) estcroissante.

<u>Exercice 2</u>
Soit la suite(v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = e^{-2n+1}$.
Démontre que la suite (v_n) est décroissante.

Solution
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Calculons : $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{-2n-1}}{e^{-2n+1}} = e^{-2}$, or $e^{-2} < 1$ donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.
Donc la suite (v_n) est décroissante.

4. Suites majorées, minorées, bornées

<u>Définitions</u>
Soit (u_n) une suite de nombre réels et E son ensemble de définition. On dit que :
• La suite (u_n) est *majorée*, s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \leq M$.
• La suite (u_n) est *minorée*, s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier naturel n de E, $u_n \geq m$.

• La suite (u_n) est *bornée*, si elle est à la fois *majorée* et *minorée*.

Remarque : On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer qu'une suite est soit minorée, soit majorée, soit bornée

.Exercice de fixation

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Si pour tout entier naturel n, $u_n < -3$, alors la suite (u_n) est minorée par -3	
2	S'il existe un entier naturel n, tel que $u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est minorée par 0	
3	Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$, alors la suite (u_n) est majorée par 2	
4	Si pour tout entier naturel n, $\lvert u_n \rvert < 1$, alors la suite (u_n) est bornée	

Solution

1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

5. Convergence d'une suite numérique

a. Définition

- On dit qu'une suite (u_n) est convergente lorsqu'elle admet une limite finie.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Propriété

- Si une suite numérique admet une limite, alors cette limite est unique.
- Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, ($l \in \mathbb{R}$ ou l est infini) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	La suite de terme général $\sqrt{n}$ est convergente.	
2	La suite de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente.	
3	La suite de terme général cos(*n)* est convergente	

Solution

1. Faux 2. Vrai 3. Faux

Exercice 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^3}$.
Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution

Soit f la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Limites de référence

Propriété

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$.

Remarque :

Les propriétés concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions numériques à variables réelles demeurent applicables aux limites de la somme, du produit ou du quotient de deux suites numériques.

Exercice de fixation

Détermine la limite de la suite (u_n) de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$ 2) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Solution

1) On a : $\frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) On a : $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

c. Propriétés : convergences des suites monotones

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
- Toute suite croissante et non majorée diverge en $+\infty$.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.	
2	Toute suite croissante et non majorée est convergente.	
3	Toute suite croissante est nécessairement convergente	
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.	

Solution

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

Remarque : Euler a démontré que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Compléments sur les limites de suites numériques

a. Croissances comparées des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$

Les résultats concernant les limites des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites.

<u>Propriété 1</u>

Suite	Hypothèse	Conclusion
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a \in \mathbb{R}$ Suite géométrique de raison a	Si $-1 < a < 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$
	Si $a = 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$
	Si $a > 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
	Si $a \leq -1$	alors la suite (a^n) n'a pas de limite
$(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Suite puissance	Si $\alpha < 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$
	Si $\alpha = 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$
	Si $\alpha > 0$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
$(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Suite logarithme		$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n) = +\infty$

<u>Exercice de fixation</u>

Pour chaque limite, parmi les quatre lettres A, B, C et D, choisis la lettre correspondant à la réponse juste.

		A	B	C	D
1	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-3} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
3	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{2}{e})^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
5	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{5}{6}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
6	$\lim\limits_{n\to+\infty} (7)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas

Solution

1. A ; 2. C ; 3. D ; 4. A ; 5. A ; 6. C

Remarque : Les propriétés de croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes s'appliquent aux suites de types (a^n), (n^α) et $(\ln n)$.

<u>Propriété 2</u> (Croissance comparée)

Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.
Si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$.

<u>Exercice de fixation</u>
Calcule la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :
$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, $v_n = n^2 - 2^{n+3}$ et $w_n = \frac{n \times 3^n}{4^n}$.

Solution

- On a : $\frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \frac{1}{\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On a :$(n^2 - 2^{n+3}) = 2^n(\frac{n^2}{2^n} - 8)$.
  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} - 8\right) = -8$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
- On a : si $a > 1$ et $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
  $\frac{n \times 3^n}{4^n} = \frac{n}{(\frac{4}{3})^n}$ $et\ a = \frac{4}{3}\ et\ a > 1\ ;\ \alpha = 1\ et\ \alpha > 0$.Tapez une équation ici.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

b. Propriétés de comparaison
Les propriétés de comparaison concernant les fonctions sont applicables aux suites.

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergentes.

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

- Soit (u_n) une suite numérique.

- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
  S'il existe deux suites (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers l, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

Conséquence

Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel
S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) converge vers 0, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est l.

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>
Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \frac{n^2}{2^n} - 8$ et $v_n = \frac{n^2}{2^n}$.
Justifie que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Solution
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 2

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -n + \cos n$ et $v_n = n^2 + (-1)^n$.
Calcule la limite de chacune des suites (u_n) et(v_n).

Solution
- Comme $\cos(n) \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq -n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$;
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Comme $(-1)^n \geq -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2 - 1) = +\infty$;
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

c. Limite d'une suite du type : $\boldsymbol{v_n = f(u_n)}$

Propriété
Soit f une fonction, E son ensemble de définition et (u_n) une suite d'éléments de E .La suite (v_n) définie par $\boldsymbol{v_n = f(u_n)}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, $(l \in \mathbb{R})$.

Exercice de fixation
Détermine la limite de la suite (v_n)de terme général $v_n = n\, sin\frac{1}{n}$.

Solution
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$.
Posons : pour tout $\in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
On a : $v_n = f(u_n)$.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

d. Suite récurrente
Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle K et (u_n) une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $\begin{cases} u_0 = a\,, a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation :

$$x \in K, f(x) = x.$$

Exercice de fixation

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 + \frac{u_n}{2}) \end{cases}$.
On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

Solution
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}x(1+\frac{1}{2}x)$.

La fonction f est continue sur $[0;1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$; donc la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $x \in [0;1], f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{2}x\right) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 2$$

Puisque, $0 \in [0;1]$ et $2 \notin [0;1]$ donc, 0 est l'unique solution de l'équation : $x \in [0;1], f(x) = x$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

C. SITUATION COMPLEXE

Une entreprise achète un véhicule à un coût de 30 000 000 F CFA. Ce véhicule se déprécie de 20% par an ; c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an, pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 3% par an. L'entreprise prévoit remplacer ce véhicule dans cinq ans en le revendant à un employé si la différence du prix d'achat du nouveau véhicule et le prix de revente de l'ancien véhicule n'excède pas 25 000 000 F CFA. Ton père est employé dans cette société et envisage acquérir ce véhicule au bout de cinq ans si son prix n'excède pas les 10.000 000 F CFA. Il se demande si la société acceptera de lui céder ce véhicule. Il te sollicite pour savoir s'il peut l'acheter.

En utilisant tes connaissances mathématiques donne-lui une réponse argumentée.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation de l'employé, je vais utiliser les suites numériques.
- Je calcule le prix de vente de chaque véhicule dans cinq ans.
- Je fais la différence des deux prix pour répondre à la préoccupation de l'employé.

  - Soit u_n le prix de revente de l'ancien véhicule après n années d'utilisation
    On a : $u_{n+1}= u_n - 0{,}2u_n= 0{,}8u_n$
    Donc u_5= 30000000 x $(0{,}8)^5$= 9 830 400 .

  - Soit v_n le prix d'achat d'un nouveau véhicule après n années
    On a : $v_{n+1}= v_n + 0{,}03u_n= 1{,}03\, u_n$
    Donc v_5= 30000000 x $(1{,}03)^5 \approx 34778222$.

  - $v_5 - u_5 = 34778222 - 9830400 \approx 24\,947\,822$
  - **Comme $24\,947\,822 < 25\,000\,000$ alors l'employé pourra acquérir ce véhicule après cinq ans.**

D. EXERCICES

1. Exercices de fixation

Exercice 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Relie à chaque élément du tableau de gauche l'élément du tableau de droite correspondant.

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors •	• (u_n) n'a pas de limite
Si $-1 < q < 1$, alors •	• (u_n) diverge vers $+\infty$
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors •	• (u_n) converge vers 0
Si $q < -1$, alors •	• (u_n) diverge vers $-\infty$

Exercice 2

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	Si $v_0 > 0$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.	
2	Si $r < 0$, alors (v_n) diverge vers $-\infty$.	
3	Si $r = 0$, alors (v_n) converge vers v_0.	

Solution

1) faux ; 2) vrai ;3) vrai.

Exercice 3
Soit la suite(u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $u_n = \sqrt{\ln n}$.
Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
Solution

Considérons la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $u_n = f(n)$.
$\forall\, x \in [2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. $\forall\, x \in [2; +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est croissante sur$[2; +\infty[$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Exercice 4

Etudie la convergence de la suite numérique de terme général $(-1)^n$.
Solution

Tous les termes de rang pair de cette suite sont égaux à 1 et ceux de rang impair à -1.
Donc cette suite n'admet pas de limite. Elle est divergente.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n+3n^2}{1+n^2}$.
Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est minorée par 2.
Solution
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n - 2 = \frac{n+3n^2}{1+n^2} - 2 = \frac{n^2+n-2}{1+n^2}$; donc : $u_n - 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2}$
$n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n \geq 1$, d'où : $\frac{(n-1)(n+2)}{1+n^2} \geq 0$. Donc : $u_n - 2 \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$.
On conclut donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est minorée par 2.

Exercice 6

On considère la suite v définie sur ℕ par : $v_n = \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}}$

Démontre que la suite v est minorée par$\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Solution

Pour tout entier naturel n de ℕ, on a : $1 \leq 1 + n^2$.

$$\begin{aligned} 1 + n^2 \geq 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+n^2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{1+n^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq 4 - \frac{2}{1+n^2} < 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}} < 2. \end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq v_n < 2$,donc, la suite v est donc bornée (minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2).

Pour tout entier naturel n de ℕ, on a : $1 \leq 1 + n^2$.

$$\begin{aligned} 1 + n^2 \geq 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+n^2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{1+n^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq 4 - \frac{2}{1+n^2} < 4 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}} < 2. \end{aligned}$$

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq v_n < 2$,donc, la suite v est donc bornée (minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2).

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est majorée par 2.
(On pourra utiliser l'inégalité : $\forall\, k \geq 2$; $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

c) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est convergente.

Solution

a) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$;
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} > 0$;

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) En utilisant l'inégalité : $\forall\, k \geq 2$; $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,
on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

Ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, car $\frac{1}{n} > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 ; donc elle converge.

d) On a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$;

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} > 0$;

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

e) En utilisant l'inégalité : $\forall\ k \geq 2;\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,

on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n\ \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.

Ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n\ \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, car $\frac{1}{n} > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 ; donc elle converge.

Exercice 8

Soit $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ et les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ telles que $u_0 = 2$; $v_0 = 3$,$u_{n+1} = au_n + (1 - a)v_n\ \ et\ \ v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n$.

1) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.
2) a- Démontre que la suite (u_n) est croissante.
   b- Démontre que la suite (v_n) est décroissante.
   c- Démontre que les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont convergentes.
3) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.
   a- Démontre que la suite (w_n) est une suite géométrique à déterminer.
   b- En déduire que les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ ont la même limite.
4) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$.
   a- Démontre que la suite (t_n) est une suite constante.
   b- En déduire la limite commune des suites $(u_n)\ et\ (v_n)$.

Solution

1) Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.

- $v_0 - u_0 = 3 - 2 = 1 > 0$, donc la proposition est vraie au rang 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $v_k - u_k > 0$, démontrons que $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$.
  $v_{k+1} - u_{k+1} = (1-a)u_k + av_k - (au_k + (1-a)v_k) = (2a-1)(v_k - u_k)$,
  D'après l'hypothèse de récurrence $v_k - u_k > 0$, par définition, $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[\Leftrightarrow 0 < 2a - 1 < 1$
  Donc $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$ et la proposition est vraie au rang $k+1$.
- Conclusion : pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.

2)

a. $u_{n+1} - u_n = au_n + (1-a)v_n - u_n = (1-a)(v_n - u_n)$.
   D'après 1) pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$, de plus $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ donc $(1-a) > 0$.
   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante.
b. $v_{n+1} - v_n = v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n - v_n = (1-a)(u_n - v_n) = -(1-a)(v_n - u_n)$.
   D'après a. pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite (v_n) est strictement décroissante.
c. La suite (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$.
   La suite (v_n) est décroissante donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$.
   D'après 1) pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$, c'est-à-dire pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

D’où pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$.
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle est convergente.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle est convergente.

3) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (1-a)u_n + av_n - (au_n + (1-a)v_n) = (2a-1)(v_n - u_n)$ donc $w_{n+1} = (2a-1)w_n$. La suite (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ et de raison $q = 2a - 1$.

b. $a \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ donc $\frac{1}{2} < a < 1$, soit $1 < 2a < 2$ et $0 < 2a - 1 < 1$.
La suite géométrique (w_n) a pour raison $q = 2a - 1$ $avec$ $0 < q < 1$ donc elle converge vers 0 et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Conclusion : les suites (v_n) et (u_n) ont la même limite.

4) Soit la suite (t_n) $avec$ $t_n = u_n + v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

a. $t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = au_n + (1-a)v_n + (1-a)u_n + av_n = u_n + v_n = t_n$.
Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n$.
La suite (t_n) est constant.

b. pour tout entier $n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 = u_0 + v_0 = 3 + 2 = 5$.
Soit l la limite commune de (u_n) et de (v_n). Comme la suite (t_n) est une suite constant alors elle est convergent.

- D’une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$.
- D’autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2l$.
- On a donc $2l = 5 \Leftrightarrow l = \frac{5}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{5}{2}$.