



THEME : FONCTIONS NUMÉRIQUES

Durée : 12 heures

Code :

## Leçon 1 : Limites et continuité d'une fonction

### A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les élèves de Terminale s'exercent à la photographie au sein du club photo du lycée. On les informe qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende d'une distance  $a$  à une distance  $r$ , la mise au point doit être faite à la distance :  $P = \frac{2ar}{a+r}$  (les distances sont exprimées en mètres).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».

Un élève affirme alors que :  $P = 10 - \frac{50}{5+r}$ . Ce qui n'est pas de l'avis des autres.

Ensemble ils décident de vérifier cette formule et de faire des calculs pour déterminer la distance de mise au point à choisir quand l'objet s'éloigne.

### B. CONTENU DE LA LEÇON

#### 1. Limite d'une fonction composée

##### Propriété

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques.  $a$ ,  $b$  et  $\ell$  sont des éléments de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$ .

Exercice de fixation

1 Calcule la limite en  $+\infty$  de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \sqrt{4 + \frac{2}{x^2+1}}$ .

2. Calcule la limite en 0 de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ .

**Solution**

1.  $h(x) = g \circ f(x)$  avec  $f(x) = 4 + \frac{2}{x^2+1}$  et  $g(x) = \sqrt{x}$

Nous avons:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{x^2+1}\right) = 4$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$

et  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$ .

2.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = u \circ v(x)$  où  $v(x) = 2x$  et  $u(x) = 2 \times \frac{\sin x}{x}$

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin x}{x} = 2$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

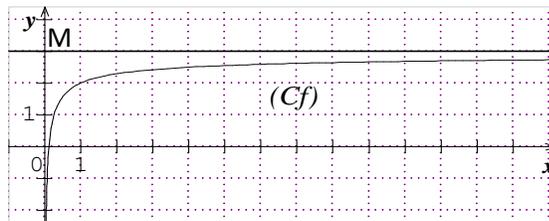
**2. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert**

**Propriété 1**

$a$  et  $b$  sont des éléments de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$  et  $f$  une fonction numérique.

Si  $f$  est croissante et majorée par un nombre réel  $M$  sur l'intervalle  $]a, b[$  alors  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $b$ .

De plus  $\ell \leq M$ .

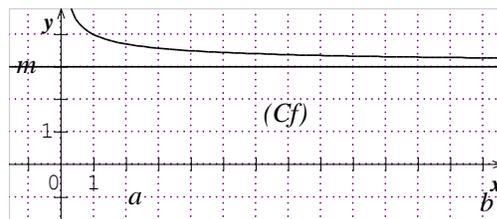


**Propriété 2**

$a$  et  $b$  sont des éléments de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$  et  $f$  une fonction numérique.

Si  $f$  est décroissante et minorée par un nombre réel  $m$  sur l'intervalle  $]a, b[$  alors  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $b$ .

De plus  $\ell \geq m$ .



### Exercice de fixation

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Sachant que :  $\forall x \in [1; +\infty[$ , on a :  $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$ .

Justifie que  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$  et donne un encadrement de  $\ell$ .

### Solution

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ ,

$\forall x \in [1; +\infty[$ , on a :  $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$ .

$\forall x \in [1; +\infty[$ ,  $-\frac{1}{x} \leq 0$  donc  $f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1) \leq 1 + f(1)$ .

La fonction  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$  et majorée par  $1 + f(1)$  donc  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . D'où :  $f(1) \leq \ell \leq 1 + f(1)$ .

### 3. Branches paraboliques

#### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$

- On dit que  $(C)$  admet en  $+\infty$  une **branche parabolique de direction celle de (OI)** lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,
- On dit que  $(C)$  admet en  $+\infty$  une **branche parabolique de direction celle de (OJ)** lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (ou  $-\infty$ ) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (ou  $-\infty$ ),

**Remarque :** On définit de manière analogue les branches paraboliques en  $-\infty$ .

### Exercice de fixation

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Démontre que  $(C)$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de  $(OI)$ .

### Solution

$f$  est définie sur  $]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ . On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ .

D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

$\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$ . On a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$ .

On a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$ . On conclut que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , donc (C) admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de (OI).

## 4. Continuité sur un intervalle

### 4.1-Définition

On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si elle est continue en tout élément de  $I$ .

### Exemple

Les fonctions polynôme, rationnelle, sinus, cosinus, racine carrée, puissance, valeur absolue et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition respectifs.

### 4.2-Prolongement par continuité

#### Propriété et définition

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  et  $a$  un nombre réel n'appartenant pas à  $D_f$ .

Si  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $a$ , alors on dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  et la

fonction  $g$  définie sur  $D_f \cup \{a\}$  par : 
$$\begin{cases} \forall x \in D_f, g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

est continue en  $a$  et est appelée **le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$** .

### Exemple

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de  $f$  en  $0$ .

### Exercice de fixation

1. Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$ .

Démontre que  $f$  admet en  $9$  un prolongement par continuité  $\varphi$ , et définit le.

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$  par :  $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$

$g$  est-elle prolongeable par continuité en  $0$  ? Justifie ta réponse.

### Solution

$$1. D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x - 5 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-5} - 2 \neq 0 \}$$

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$\sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9.$$

$$\text{Donc : } D_f = [5 ; 9[ \cup ]9 ; +\infty[.$$

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \sqrt{x-5} + 2$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x-5} + 2) = 4$$

Ainsi,  $9 \notin D_f$  et  $f$  admet une limite finie en 9. Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 9.

La fonction  $\varphi$  est définie sur  $[5 ; +\infty[$  par :  $\varphi(9) = 4$  et  $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$  est le prolongement par continuité de  $f$  en 9.

Remarque:  $\varphi$  est définie sur  $[5 ; +\infty[$  par:  $\varphi(x) = \sqrt{x-5} + 2$ .

2.

$$\text{Pour tout } x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[ ; g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x} = 1$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

$$\text{Pour tout } x \in ]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[ ; g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{x - 1} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ , ainsi  $g$  n'admet pas de limite en 0, donc  $g$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

### 4.3- Image d'un intervalle par une fonction continue

#### Propriété 1

L'image d'un intervalle  $I$  par une fonction continue sur  $I$  est un intervalle ou un singleton.

#### Exercice de fixation

Détermine l'image de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  par la fonction cosinus.

#### Solution

La fonction cosinus est continue sur  $]-\pi; \pi]$

Or pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $]-\pi; \pi]$ ,  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ .

De plus  $\cos(\pi) = -1$  et  $\cos(0) = 1$ .

Donc l'image de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  par la fonction cosinus est  $[-1; 1]$ .

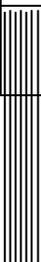
**Propriété 2**

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ .

Intervalle $I$	$f$ est strictement croissante sur $I$	$f$ est strictement décroissante sur $I$
$[a; b]$	$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f([a; b[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b}^- f(x)[$	$f([a; b[) = ] \lim_{x \rightarrow b}^- f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$f(]a; b]) = ] \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x); f(b) ]$	$f(]a; b]) = [ f(b); \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x) [$
$]a; b[$	$f(]a; b[) = ] \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x); \lim_{x \rightarrow b}^- f(x)[$	$f(]a; b[) = ] \lim_{x \rightarrow b}^- f(x); \lim_{x \rightarrow a}^+ f(x)[$
$[a; +\infty[$	$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty; +\infty[$	$f(] -\infty; +\infty[)$ $= ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f(] -\infty; +\infty[)$ $= ] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

**Exercice de fixation**

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction  $f$  définie et continue sur les intervalles  $] -\infty; 0[$  et  $] 0; +\infty[$ .

$x$	$-\infty$	$-1$		$0$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$			$-$

$f(x)$	$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ \nearrow & & \searrow \\ -2 & & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & +\infty & \\ \nearrow & & \searrow \\ & & 1 \end{array}$
--------	---	--

Détermine l'image par  $f$  de chacun des intervalles suivants :  $] -\infty ; -1]$ ,  $]0 ; +\infty[$  et  $[-1 ; 0[$ .

### Solution

- $f$  est continue et strictement croissante sur  $] -\infty ; -1]$  donc :  
 $f(]-\infty ; -1]) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1) \right] = ]-2 ; 5]$ .
- $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0 ; +\infty[$  donc :  
 $f(]0 ; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right[ = ]1 ; +\infty[$ .
- $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1 ; 0[$  donc :  
 $f([-1 ; 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); f(-1) \right[ = ]1 ; 5[$ .

## 4.4-Opérations sur les fonctions continues

### Propriété 1

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ , alors :

- ✓ les fonctions  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $|f|$  sont continues sur  $I$ .
- ✓ si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$ .
- ✓ si  $f$  est positive sur  $I$  alors fonction  $\sqrt{f}$  est continue sur  $I$ .

### Exercice de fixation

Soit  $g$  et  $h$  deux fonctions définies de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 + \sin x$  et  $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

- 1) Justifie que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Justifie que  $h$  est continue sur  $] -\infty ; -1]$ .

### Solution

- 1)  $g$  est la somme des fonctions  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto \sin x$  qui sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) La fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  est continue et positive sur  $] -\infty ; -1]$ .  
Donc  $h$  est continue sur  $] -\infty ; -1]$ .

### Propriété 2

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et  $g$  continue sur l'ensemble  $f(I)$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

### Exercice de fixation

Soit  $g$  et  $f$  deux fonctions définies de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1+x}{2+x}$  et  $f(x) = \cos x$

Justifie que  $g \circ f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ .

La fonction  $g$  est continue sur  $[-1; 1]$

Donc la fonction  $g \circ f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 5. Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

### 5.1-Propriétés

#### Propriété 1

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors :

- $f$  est une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ .
- la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est continue et strictement monotone sur  $f(I)$ .
- $f^{-1}$  a le même sens de variation que  $f$ .

**Remarque :** Les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  dans le plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

### Exercices de fixation

#### Exercice 1

Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Démontre que  $f$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.

2. Déduis en le sens de variation de la bijection réciproque  $f^{-1}$ .

#### Solution

$$1. D_f = [0; +\infty[.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

$$f \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[ \text{ et pour tout } x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  car  $\forall x \in ]0; +\infty[, 2x > 0$  et  $(1+x^2)^2 > 0$ .

$f$  est donc continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ ; par suite  $f$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  sur  $f([0; +\infty[) = [0; 1[$ .

2.  $f^{-1}$  est donc définie sur  $[0; 1[$ .  $f^{-1}$  a le même sens de variation que  $f$ , donc  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0; 1[$ .

#### Exercice 2

Soit la fonction  $g: [1; 3] \rightarrow [0; 4]$

$$x \mapsto -x^2 + 2x + 3$$

- Démontre que  $g$  est une bijection.
- Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ .

### Solution

1.  $g$  est dérivable sur  $[1;3]$ .  $\forall x \in [1;3], g'(x) = -2x + 2$ .

$x$	1	3
$-2x + 2$	0	-

$$\forall x \in ]1;3], g'(x) < 0$$

La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[1;3]$  et  $g([1;3]) = [g(3);g(1)] = [0;4]$

donc  $g$  est une bijection.

2. Soit  $y \in [0;4]$ . Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1;3]$ , on a les équivalences suivantes :

$$g(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4-y}, \text{ car pour } y \in [0;4], 1 + \sqrt{4-y} \in [1;3]$$

D'où la bijection réciproque  $g^{-1}$  est définie de  $[0;4]$  sur  $[1;3]$  par :  $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4-x}$ .

### Propriété 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ .

Pour tout  $m$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation :  $f(x) = m$  admet au moins une solution comprise entre  $a$  et  $b$ .

### Corollaire 1

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ .

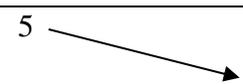
Pour tout  $m$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation :  $f(x) = m$  admet une unique solution comprise entre  $a$  et  $b$ .

### Exercice de fixation

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie et continue sur  $[-1;+\infty[$

1. Justifie que l'équation :  $f(x) = -10$  admet une unique solution dans  $[-1;+\infty[$ .

$x$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	5	$-\infty$



2. L'équation :  $f(x) = 13$  admet-elle une solution dans  $[-1; +\infty[$  ? Justifie ta réponse.

### **Solution**

1.  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1; +\infty[$ ,  $f([-1; +\infty[) = ]-\infty; 5]$  et  $-10 \in ]-\infty; 5]$  donc l'équation :  $f(x) = -10$  admet une solution unique dans  $[-1; +\infty[$ .

2.  $13 \notin ]-\infty; 5]$  donc l'équation :  $f(x) = 13$  n'admet pas de solution dans  $[-1; +\infty[$ .

### **Corollaire 2**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  et si  $f(a) \times f(b) < 0$  alors l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $]a; b[$ .

### **Exercice de fixation**

Démontre que l'équation :  $x \in ]0; 1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

### **Solution**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par:  $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$ .  $f$  est dérivable sur  $[0; 1]$ .

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f'(x) = 6x^2 + 3$ . Par suite, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f'(x) > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

$f(0) = -1$  et  $f(1) = 4$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; 1]$  et  $f(0) \times f(1) < 0$ ,

donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; 1[$ .

## **5.2. Valeur approchée de la solution $\alpha$ d'une équation**

### **Méthodes pratiques de détermination d'une valeur approchée de la solution $\alpha$ d'une équation**

L'équation :  $x \in ]0; 1[, 2x^3 + 3x - 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

Donne une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

### **Solution**

Posons  $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$

- **Méthode 1** : Méthode de balayage

Pour obtenir une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près, on effectue un balayage de  $[0; 1]$  avec un pas égal à  $0,1$  jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires.

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	-1	-0,7	-0,38	-0,05	0,3

On a :  $f(0,3) \times f(0,4) < 0$  donc  $0,3 < \alpha < 0,4$ .

Une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près est 0,3.

- **Méthode 2** : Méthode de dichotomie

$f$  est une fonction dérivable et monotone sur l'intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires. Il existe  $\alpha$  élément de  $[a; b]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Il s'agit de trouver un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude réduite. On procède comme suit :

- ✓ On calcule :  $f(a)$  et  $f(\frac{a+b}{2})$
- ✓ Si  $f(a)$  et  $f(\frac{a+b}{2})$  sont de signes contraires alors  $\alpha \in [a, \frac{a+b}{2}]$   
Si  $f(a)$  et  $f(\frac{a+b}{2})$  sont de même signe alors  $\alpha \in [\frac{a+b}{2}; b]$
- ✓ On répète le même processus dans le nouvel intervalle trouvé auquel appartient  $\alpha$  jusqu'à trouver un intervalle d'amplitude demandé.
- ✓

Appliquée à notre exercice, cette méthode donne ce qui suit :

- ✓  $f(0) = -1$  et  $f(0,5) = 0,75$ , donc  $f(0)$  et  $f(0,5)$  sont de signe contraires, par conséquent  $\alpha \in [0; 0,5]$
- ✓  $f(0) = -1$  et  $f(0,25) = -0,22$ , donc  $f(0)$  et  $f(0,25)$  sont de même signe, par conséquent  $\alpha \in [0,25; 0,5]$
- ✓  $f(0,25) = -0,22$  et  $f(0,375) = 0,23$  donc  $f(0,25)$  et  $f(0,375)$  sont de signes contraires par conséquent  $\alpha \in [0,25; 0,375]$
- ✓  $f(0,25) = -0,22$  et  $f(0,3125) = -0,0014$  donc  $f(0,25)$  et  $f(0,3125)$  sont de même signe, par conséquent  $\alpha \in [0,3125; 0,375]$   
En finalement à l'ordre 1 on conclue que  $\alpha \in [0,3; 0,4]$  d'où une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près est 0,3.

## 6. Fonction racine $n^{\text{ième}}$ , fonction puissance d'exposant rationnel

### 6.1-Fonction racine $n^{\text{ième}}$

#### Définition

Soit  $n$  un nombre entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

La fonction racine  $n^{\text{ième}}$  est la bijection réciproque de la fonction

$$f: [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[ \\ x \mapsto x^n$$

La racine n<sup>ième</sup> d'un nombre réel positif ou nul  $x$  est notée  $\sqrt[n]{x}$  ou  $x^{\frac{1}{n}}$ .

**Conséquences :**

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt[n]{x})^n = x \text{ ou } (x^{\frac{1}{n}})^n = x \text{ et } \sqrt[n]{x^n} = x.$$

**Exemples**

$$x \in \mathbb{R}^+, x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}; \quad x \in \mathbb{R}^+, x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7} . \\ \sqrt[4]{16} = 2; \quad \sqrt[5]{120^5} = 120 .$$

## 6.2-Puissance d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif

**Définition**

Soit  $p$  un nombre entier relatif non nul et  $q$  un nombre entier naturel tel que  $q \geq 2$ .

Pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, on pose :  $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$  .

**Exemple**

**Propriétés**

Pour tous nombres rationnels  $r$  et  $r'$  non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^r \times a^{r'} &= a^{r+r'} & \blacksquare \frac{1}{a^r} &= a^{-r} & \blacksquare \frac{a^{r'}}{a^r} &= a^{r'-r} = \frac{1}{a^{r-r'}} \\ \blacksquare (a^r)^{r'} &= a^{rr'} & \blacksquare a^r \times b^r &= (ab)^r & \blacksquare \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r \end{aligned}$$

**Exercice de fixation**

1. Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme  $a^\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre rationnel,

les nombres réels suivants :  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ ;  $\frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}$ ;  $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}$  .

2. Justifie que :  $\frac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt[5]{256}} = 2\sqrt{2}$  .

3. Justifie que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :  $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt[3]{\sqrt{ab^5}} = ab$ .

**Solution**

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} &= \left( \left( a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}; \quad \frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}} = \frac{a^3}{a^{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}} = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{5}}} = a^{3 - \frac{1}{5}} = a^{\frac{14}{5}}; \\ \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} &= (a)^{\frac{1}{3}} \times (a)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ On a : } \frac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt[5]{256}} = \frac{2^2 \times 2^{\frac{3}{10}}}{\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2+\frac{3}{10}}}{2^{\frac{8 \times 1}{5}}} = \frac{2^{\frac{23}{10}}}{2^{\frac{8}{5}}} = 2^{\frac{23}{10}-\frac{16}{10}} = 2^{\frac{7}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$3. \sqrt[3]{a^5 b} \times \sqrt[3]{ab^5} = \left( (a^5 b)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left( (ab^5)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} b^{5 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} \\ = a^{5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{6}{6}} b^{\frac{6}{6}} = ab$$

## C. SITUATIONS COMPLEXES

### Situation 1

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à  $f(t) = \frac{200}{t} + 10$  où  $f(t)$  désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant  $t$  ( $t$  est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute ( le premier contrôle ayant lieu à l'instant  $t = 1$ ). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.

### Solution

Dans cet exercice, les élèves cherchent à déterminer la température après une longue période de refroidissement.

Pour déterminer la température de ce corps après une longue période de refroidissement

- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction donnée en  $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

La température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant  $t$  est  $f(t) = \frac{200}{t} + 10$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{200}{t} + 10 \right) = 10.$$

La température de ce corps après une longue période de refroidissement est de 10°C.

### Situation 2

Les élèves du club photo de ton établissement s'exercent à la photographie. Ils savent qu'en photographie, la profondeur de champ correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

Ils savent également qu'en optique, pour que la netteté s'étende d'une distance  $a$  à une distance  $r$ , la mise au point doit être faite à la distance  $P$  moyenne harmonique des distances  $a$  et  $r$  (les distances sont exprimées en mètres)

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ». Ils te sollicitent à cet effet.

En t'appuyant sur tes connaissances, détermine la distance de mise au point à choisir.

### Solution

Dans cet exercice, les élèves souhaitent que la netteté s'étende de «5m à l'infini ».

Pour déterminer la distance de mise au point à choisir

- J'exprime  $P$  en fonction de  $a$  et  $r$ .
- J'utilise les limites de fonction.
- Je calcule la limite de la fonction correspondante en  $+\infty$
- J'interprète le résultat trouvé.

$P$  est la moyenne harmonique des distances  $a$  et  $r$  donc  $\frac{2}{P} = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}$  c'est-à-dire  $P = \frac{2ar}{a+r}$ .

Pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini », la mise au point doit être faite à la distance :  $P = \frac{10x}{5+x}$  pour  $x$  tendant vers  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{10x}{5+x} \right) = 10.$$

La distance de mise au point à choisir pour que la netteté s'étende de «5m à l'infini » est de 10 mètres.

## D. EXERCICES RÉSOLUS

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

### Exercice 1

La fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty;0[$  et sur  $]0;+\infty[$  et a pour tableau de variation le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-2$	$5$	$1$	$1$

Diagramme de variation : Le tableau ci-dessus est complété avec des flèches et des points. Une flèche pointe de  $x = -\infty$  vers  $x = -2$  (de  $-2$  à  $5$ ). Une autre flèche pointe de  $x = -2$  vers  $x = 0$  (de  $5$  à  $1$ ). À  $x = 0$ , il y a une ligne à double trait. À droite de  $x = 0$ , une flèche pointe de  $x = 0$  vers  $x = +\infty$  (de  $1$  à  $1$ ).

En utilisant ce tableau, donner les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-2 + \frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{-1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right).$$

### SOLUTION

On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x}\right) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-2 + \frac{1}{x}\right) = 5$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{-1}{x}\right) = -2$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right) = +\infty$ .

### Exercice 2

Calcule les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$ .

SOLUTION

Calculons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right)$

On rappelle que  $\forall T \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(T) \leq 1$ . En particulier  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x^5) \leq 1$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x^5)}{x} \leq \frac{1}{x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x^5)}{x}\right) = 0$ .

### Exercice 3

Soit la fonction  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = E(x) + (x - E(x))^2$  où  $E(x)$  désigne la partie entière du nombre réel  $x$ .

1. Soit  $n$  un entier relatif.

Justifie que la fonction  $k$  est continue en  $n$ .

2. Justifie que la fonction  $k$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Solution

La fonction  $k$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = E(x) + (x - E(x))^2$  où  $E(x)$  désigne la partie entière du nombre réel  $x$ .

1.  $n$  étant un entier relatif,  $k(n) = E(n) + (n - E(n))^2 = n - 0 = n$ .

Calculons la limite de  $k$  à gauche en  $n$ .

Pour  $n - 1 \leq x < n$ ,  $E(x) = n - 1$  donc  $k(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^-} k(x) = n - 1 + (n - n + 1)^2 = n$$

Calculons la limite de  $k$  à droite en  $n$ .

Pour  $n \leq x < n + 1$ ,  $E(x) = n$  donc  $k(x) = n + (x - n)^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow n^+} k(x) = n + (n - n)^2 = n.$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow n^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} k(x) = k(n)$ , donc la fonction  $k$  est continue en  $n$ .

#### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ .

1. Calcule la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que la droite (D) d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative ( $C_f$ ) de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Etudie la position de ( $C_f$ ) par rapport à (D).

#### Solution

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Interprétation graphique : la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$  est asymptote horizontale à la représentation graphique ( $C_f$ ) de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Démontrons que la droite (D) d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative ( $C_f$ ) de  $f$  en  $-\infty$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x + \frac{1}{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)} + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative ( $C_f$ ) de  $f$  en  $-\infty$ .

3. Etudions la position de ( $C_f$ ) par rapport à (D).

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \text{ et une équation de (D) est } y = -2x - \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x + \frac{1}{2})^2 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > \left| x + \frac{1}{2} \right| \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} > x + \frac{1}{2} \text{ et } \sqrt{x^2 + x + 1} > -2x - \frac{1}{2}.$$

Par suite  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > -2x - \frac{1}{2}$  donc  $(C_f)$  est au-dessus de la droite (D).

### Exercice 5

**Partie A.**  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

1. Calcule les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Etudie les variations de  $g$  et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $1,6 < \alpha < 1,7$ .
4. Démontre que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

**Partie B.**  $f$  est la fonction définie sur  $] -1; +\infty [$  par :  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ . On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de  $f$  en  $-1$  et en  $+\infty$  puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2.a) Démontre que :  $\forall x \in ] -1; +\infty [, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$ .
- b) Etudie les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).
3. Trace (T) et (C).

### Solution

**Partie A** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty.$$

2.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 6x^2 - 6x$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

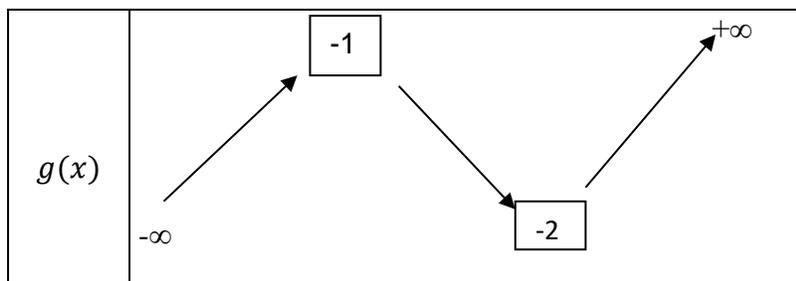
$$\forall x \in ] -\infty ; 0[ \cup ]1; +\infty [, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in ]0; 1[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :  $g$  est strictement croissante sur  $] -\infty ; 0]$  et sur  $[1; +\infty [$ ,  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; 1]$

### Tableau de variation de $g$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$



4. - La fonction  $g$  est dérivable sur  $] -\infty ; 1]$ , et  $g'$  s'annule en 0.

Par ailleurs, pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $g'(x) > 0$  et pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $g'(x) < 0$

Par suite  $g(0)$  est le maximum de  $g$  sur  $] -\infty ; 1]$ .

D'où :  $\forall x \in ] -\infty ; 1]$ ,  $g(x) \leq g(0)$  et comme  $g(0) < 0$ , finalement,  $\forall x \in ] -\infty ; 1]$ ,

$g(x) < 0$ .

- La fonction

$g$  est continue et strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ ;  $g([1 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$ ,

Or  $0 \in [-2 ; +\infty[$ , donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[1 ; +\infty[$ .

On conclut : l'équation  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

1,6 et 1,7 appartiennent à  $[1 ; +\infty[$ ;  $g(1,6) \approx -0,49$  et  $g(1,7) \approx 0,16$ ;

$g(1,6) \times g(1,7) < 0$  donc  $1,6 < \alpha < 1,7$ .

4. - Il a été démontré à la question 3) que  $\forall x \in ] -\infty ; 1]$ ,  $g(x) < 0$ .

- La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[1 ; \alpha [$  et sur  $] \alpha ; +\infty[$ , d'où :

$g([1 ; \alpha [) = [-2 ; 0[$  et  $g(] \alpha ; +\infty[) = ]0 ; +\infty[$  donc :

$\forall x \in [1 ; \alpha [$ ,  $g(x) < 0$  et  $\forall x \in ] \alpha ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

On conclut :

$\forall x \in ] -\infty ; \alpha [$ ,  $g(x) < 0$   $\forall x \in ] \alpha ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$

## Partie B

### 1. Limite en $-1$ :

Pour tout  $x > -1$ ,  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{1}{1+x^3} (1-x)$

pour  $x > -1$ , on a  $x^3 > -1$ , soit  $x^3 + 1 > 0$ , par suite  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x^3} = +\infty$

et comme  $\lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 2$  alors  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote à (C).

\* **Limite en  $+\infty$**

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote à (Cf) en  $+\infty$ .

2. a)  $f$  est dérivable sur  $] -1 ; +\infty [$ ,

$$\forall x \in ] -1 ; +\infty [, f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

b)  $\forall x \in ] -1 ; +\infty [, (1+x^3)^2 > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$  déterminé à la fin de

la partie A, par suite :

$\forall x \in ]-1; \alpha[ , f'(x) < 0$  ;  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[ , f'(x) > 0$  et  $f'(\alpha) = 0$ .

On en déduit que  $f$  est strictement décroissante sur  $] -1; \alpha]$  et strictement croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

**Tableau de variation de  $f$ ,**

$X$	$-1$	$\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$+\infty$	$f(\alpha)$	$0$

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = -1 ; f(0) = 1.$$

Ainsi une équation de la tangente (T) est :  $y = -x + 1$ .

$$d) \text{ Pour tout } x > -1 , f(x) - (-x + 1) = \frac{x^2 - x}{1 + x^3} = \frac{x(x-1)}{1 + x^3}$$

$\forall x \in ] -1; +\infty [ , 1 + x^3 > 0$  donc le signe de  $f(x) - (-x + 1)$  est celui de  $x(x - 1)$ .

$$f(x) - (-x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

$\forall x \in ] -1; 0[ \cup ]1; +\infty [ , f(x) - (-x + 1) > 0$  et  $\forall x \in ] 0; 1[ , f(x) - (-x + 1) < 0$

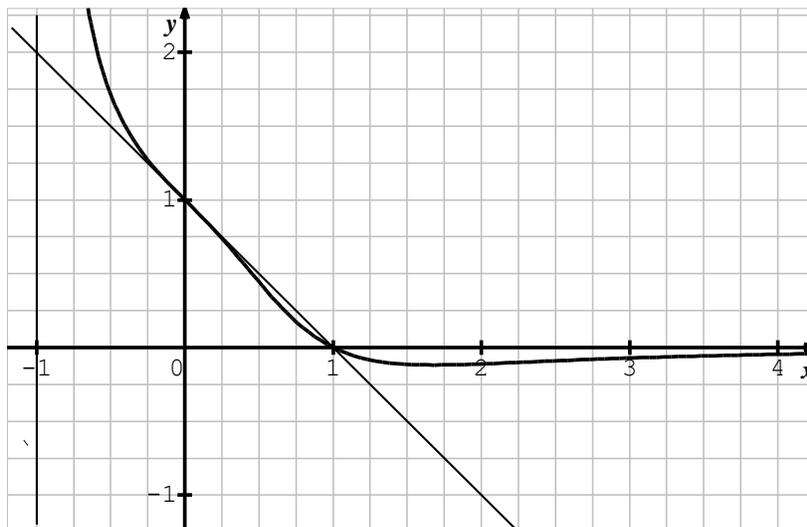
On en déduit que :

(C) est au-dessus de (T) sur  $] -1; 0[ \cup ]1; +\infty [$ ,

(C) est au-dessous de (T) sur  $]0; 1[$

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

### 3. Représentation graphique de (T) et (C).



## E. EXERCICES

### I – EXERCICES DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

#### Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$ ;

b)  $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + x - 1$ ;

c)  $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$ ;

d)  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$ ;

e)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ ;

f)  $f(x) = x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ ;

g)  $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$ ;

h)  $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$ .

#### Exercice 2

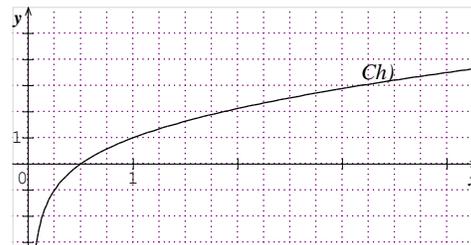
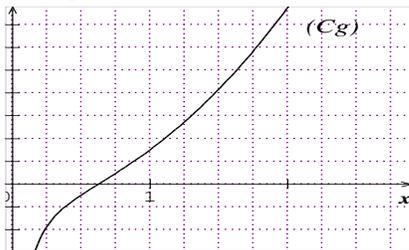
Soit f la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{4x^2+x}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

Démontre que la droite d'équation y

$$= 2x - \frac{1}{4} \text{ est une asymptote oblique à } (C_f) \text{ en } +\infty$$

#### Exercice 3

Soit g et h les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x}$  et  $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ , dont les courbes représentatives sont données ci - dessous :



Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ .

Interprète graphiquement les résultats

#### Exercice 4

On considère les fonctions f et g de IR vers IR définies par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}} \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2+1} - 3x^2.$$

On note  $(C_f)$  et  $(C_g)$  les courbes représentatives de f et g.

1. Démontre que  $(C_f)$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.



Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$  et  $(C_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

b) Etudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.

2. a) Démontre que l'équation :  $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $3 < \alpha < 4$ .
- b) Donne une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
3. Trace  $(C_f)$ .

### Exercice 11

Soit  $f : ]-\infty ; -\frac{1}{2}[ \rightarrow ]\frac{1}{2}; +\infty[$   
 $x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$

$(C_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Démontre que  $f$  est une bijection et détermine sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .
2. Trace la représentation graphique de  $f$ , puis déduis en celle de  $f^{-1}$ .

### Exercice 12

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 + 2x - 2$ .

1. a) Démontre que l'équation :  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .
- b) démontre :  $0,77 < \alpha < 0,78$ .

2. Démontre que :

$$\forall x \in ]-\infty ; \alpha[, g(x) < 0, \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ g(x) > 0.$$

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; 0 [ \cup ] 0; +\infty [$  par :  $f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ .

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité : 2 cm.

1. Calcule les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2.a) Démontre que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C)$ .
- b) Etudie la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
- 3.a) Démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

- b) Dresse son tableau de variation.
- c) Donne une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
4. Trace  $(T)$ ,  $(D)$  et  $(C)$ .

### Exercice 13

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ , de courbe représentative  $(C_f)$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ .
- a) Etudie le sens de variation de  $g$  et calcule ses limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b) Montre que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$

une unique solution notée  $\alpha$ .

c) Donne un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1.

d) Dédus en le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

2. a) Détermine les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b) Détermine les limites de  $f$  à gauche et à droite en -1 et en 1.

Interprète graphiquement les résultats obtenus

c) Montre que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

d) Dédus en les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3.a) Détermine les nombres réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}.$$

b) Dédus en que  $(C_f)$  admet une asymptote oblique (D) d'équation  $y = x + 2$ .

c) Etudie la position relative de  $(C_f)$  et (D).

d) Montre que les abscisses des points B et B' où  $(C_f)$  admet une tangente parallèle à (D) sont -

$$2 + \sqrt{3} \text{ et } -2 - \sqrt{3}$$

4. Donne une équation de la tangente (T) à  $(C_f)$  au point d'abscisse 2.

5. Détermine les points d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite (OI).

6. Trace  $(C_f)$  et la tangente (T).