LEÇON 5 : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'une grande chaîne de magasins. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres proportionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $\mathrm{P}(t) = 1 - e^{-0{,}21t}$.
Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Dans la formule de P, les élèves remarquent une nouvelle fonction : la fonction $x \mapsto e^{x}$. Ils décident d'étudier cette nouvelle fonction afin de répondre à la préoccupation de la grande chaine de magasins

2. RESUME DE COURS

I. Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition
La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

b) Autre notation :
Pour tout nombre réel x, exp(x) se note également e^{x} : $\exp(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

c) Conséquences de la définition
- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b,
$\ln(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$ équivaut à $\mathrm{e}^{\mathrm{b}} = \mathrm{a}$.
- $\mathrm{e}^{0} = 1$; $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$.
- Pour tout nombre réel a, $\mathrm{e}^{\mathrm{a}} > 0$.
- Pour tout nombre réel a, $\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{a}}) = \mathrm{a}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln \mathrm{a}} = \mathrm{a}$.

Exercice
a) Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponse

L'ensemble de définition de la fonction $x : \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	
Le nombre e^{-10} est négatif.	
Le nombre e^0 est égal à 0.	
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à $ln12$.	
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	

b) Ecris chacun des nombres A, B, C et D suivants sous forme de nombre rationnel.

$A = \ln(e^8)$ $B = \ln(e^{-5})$ $C = e^{ln3}$ $D = e^{-ln2}$

Corrigé

a)

Affirmations	Réponse
L'ensemble de définition de la fonction $x : \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	vrai
Le nombre e^{-10} est négatif.	Faux
Le nombre e^0 est égal à 0.	faux
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à $ln12$.	Faux
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	vrai

b)

$A = \ln(e^8)$ $= 8$	$B = \ln(e^{-5})$ $= -5$	$C = e^{ln3}$ $= 3$	$D = e^{-ln2}$ $= e^{ln\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$

2. Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels *a* et *b*,

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{1}{e^b} = e^{-b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^r = e^{ar}$$

Exercice

Ecris chacun des nombres E, F et G suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

$E = e^6 \times e^{-4}$ $F = (e^{-2})^4$ $G = \frac{e^4}{e^{-5}}$

Corrigé

$E = e^6 \times e^{-4}$ $= e^{6+(-4)}$ $= e^2$	$F = (e^{-2})^4$ $= e^{-2\times4}$ $= e^{-8}$	$G = \frac{e^4}{e^{-5}}$ $= e^{4+5}$ $= e^9$

<u>Exercice maison</u>

Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

a) $e^{-3} \times e^{\frac{1}{2}}$; b) $\frac{e^4}{e^2}$; c) $(e^3)^{-2}$; d) $\frac{1}{e^{-5}}$;

II Limites, sens de variations et représentation graphique de la fonction exponentielle

1. Limites de référence

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Exercice
Calcule les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 - e^x)$

Corrigé
a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 3$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 3 = 3$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x = 2 \times \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x = 2 \times 0 = 0$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

$$= -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

2. Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle.

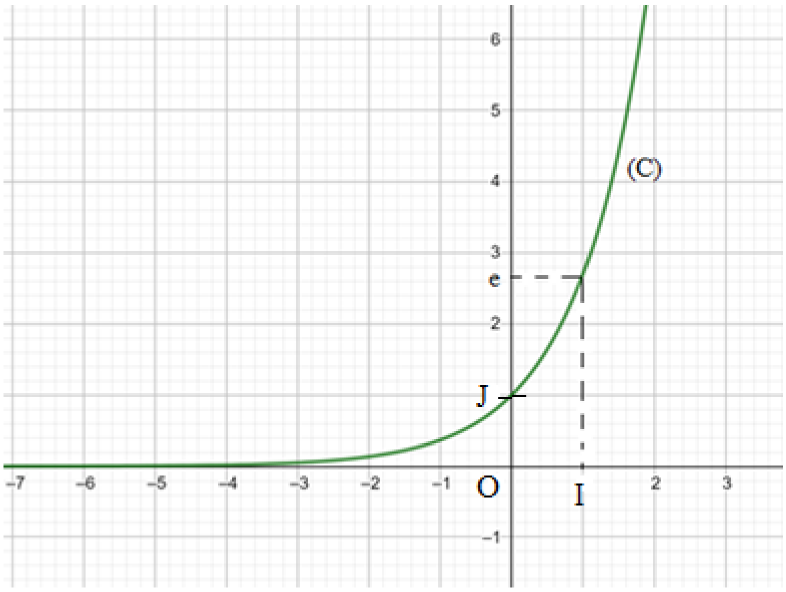
Propriété
La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$.
La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Représentation graphique de la fonction exp.

Notons (C) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe (OI), est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.



Exercice

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + e^x$.
1. Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Calcule $f'(x)$.

Corrigé

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + e^x) = -\infty$ car : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + e^x) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 + e^x$.

Exercice de maison

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + e^x$.
1. Calcule la limite de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

2. Calcule $f'(x)$.

B-3. Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction exp.

1. Propriété

Pour tous nombres réels a et b :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

2. Equations

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$

Corrigé

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	2) $e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	3) $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^{x})^2 + e^{x} - 6 = 0$ Posons : $X = e^{x}$. **Donc $X > 0$** L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \dfrac{-1-5}{2}$ ou $X = \dfrac{-1+5}{2}$ $X = -3$ ou $X = 2$, $X = -3$ est impossible car **$X > 0$.** $e^{x} = 2$ on a : $x = \ln 2$ $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$

Exercices de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{3-x} = 1$; b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$; c) $2 - e^{x} = 0$; d) $(e^{x} - 2)(e^{-x} + 1) = 0$
e) $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$

3. Inéquations

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

Corrigé

<table>
<tr>
<td>

1) $e^{2x-1} < 8$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$
$\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$
$\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$
$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$

</td>
<td>

2) $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$
Posons $e^{x} = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$
$\Delta = 25 - 24 = 1$
$X = 2$ ou $X = 3$
Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$

X	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$X^2 - 5X + 6$	+	0	-	0	+

$X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \epsilon]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$
On a : $e^{x} \epsilon]-\infty; 2]$ ou : $e^{x} \epsilon [3; +\infty[$
$e^{x} \leq 2$ ou $e^{x} \geq 3$ ce équivaut à $x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$
$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$

</td>
</tr>
</table>

Exercice de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $e^{x} - 3 \geq 0$ b) $2e^{2x} - 3e^{x} - 2 \leq 0$

IV. Dérivée et primitives

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^u est dérivable sur K et on a :

$\mathbf{(e^u)' = u'e^u}$

Exercice

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine leur fonction dérivée.

1) $f(x) = e^{-4x+3}$
2) $f(x) = e^{x+3} - 2x + 5$
3) $f(x) = (2x + 1)e^{x}$

Corrigé

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{-4x+3}$
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 + e^{x+3}$
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{x} + (2x + 1)e^{x}$
$f'(x) = (2x + 3)e^{x}$

Exercice de maison

Détermine dans chaque cas la dérivée de la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^{x}$ c) $f(x) = (1 - x)e^{x}$

2. Primitives (Terminale A1 uniquement)

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction la fonction $u'e^u$ a pour primitive sur K, la fonction $e^u + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Méthode

Fonctions	Primitives
$\boldsymbol{f: x \longmapsto e^x,}$	$\boldsymbol{F: x \longmapsto e^x + k,}$, $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{f: x \longmapsto e^{ax+b}, a \neq 0}$	$\boldsymbol{F: x \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + k}$; $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{f: x \to\longmapsto u'(x)e^{u(x)}}$	$\boldsymbol{F: x \longmapsto e^{u(x)} + k}$; $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$

Exercice

Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x$, b) $f(x) = e^{-3x+7}$, c) $f(x) = xe^{x^2}$

Corrigé

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = e^x + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $f(x) = e^{-3x+7}$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+7} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$

On a : $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{2}\ u'(x)e^{u(x)}$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Exercice de maison

Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{4x}$; b) $f(x) = e^{x+5}$

c) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$; d) $f(x) = x - \frac{3}{4} + 3e^{-2x+1}$

Exercice type Bac

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = (-2x+3)e^x$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O , I , J).

1. Justifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, puis interpréte graphiquement ce résultat.

2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$

b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty\,;2]$.

En déduis les variations de f sur $]-\infty\,;2]$

c) Dresse le tableau de variation de f.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B.

4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4		1,8		3,3			$-7,4$

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

Corrigé

1 Justifions que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On a $(-2x+3)e^x = -2x\,e^x + 3e^x$ *or* $\lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique :La droite d'équation $\mathrm{y} = 0$ est une asymptôte horizontale à(C) en $-\infty$

2. a) Vérifions que pour tout élément x de$]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$

Pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$ f est dérivable .

$f'(x) = (-2x+3)'e^x + (-2x+3)(e^x)'$

$= -2e^x + (-2x+3)e^x$

$= (-2x+3-2)e^x$

$f'(x) = (-2x+1)e^x$

b) Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty\,;2]$.

Le signe de la dérivée est celui de $(-2x+1)$.

- $(-2x+1) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$
- $(-2x+1) \geq 0$ équivaut à $x \leq \frac{1}{2}$ soit $x \in\ ]-\infty;\frac{1}{2}]$
- $(-2x+1) < 0$ équivaut à $x > \frac{1}{2}$ soit $x \in\ ]\frac{1}{2};+\infty[$

Variation de f sur $]-\infty\,;2]$

Pour tout $x \in\ ]-\infty;\frac{1}{2}]$, f est croissante

Pout tout $x \in\ ]\frac{1}{2};+\infty[$, , f est strictement décroissante.

c) le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	3.3	↘	

3. Déterminons les coordonnées respectives des points A et B.

- Soit $\mathrm{A}(x_A;y_A)$

A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses équivaut à y_A=0

Soit $(-2x_A+3)e^{x_A}$ =0

C'est-à-dire $(-2x_A+3) = 0$

$x_A = \frac{3}{2}$

Donc A$(\frac{3}{2}; 0)$

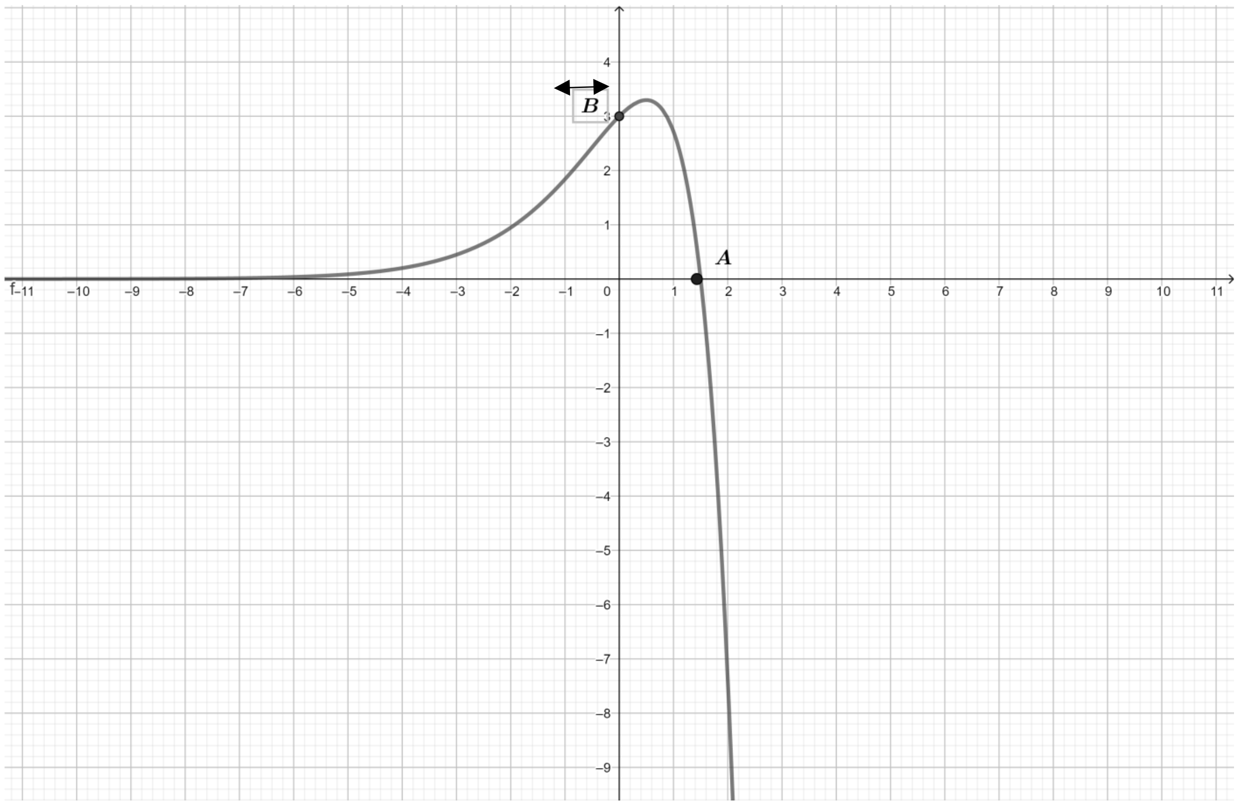
- Soit B $(x_B; y_B)$

B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées équivaut à x_B=0
Soit $(-2 \times 0 + 3)e^0 = y_B$
C'est-à-dire $y_B = 3$
Donc B $(0; 3)$

4. Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4	0.9	1,8	3	3,3	2,7	0	$-7,4$

1. Construction



3. EXERCICES

3-1. Exercices de fixation

Exercice 1
Simplifie chacun des nombres suivants :
$A=\dfrac{e^6}{e^3}$; B=$\dfrac{e^{-3}}{e^{-7}}$; C=$\dfrac{e^5\times e^{-2}}{e^3}$; D=$e^6\times e^{-4}$; E=$\left(e^{-4}\right)^3$

Exercice 2
Simplifie les expressions suivantes :
a) $(e^x)^3e^{2x}$ b) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2}$ c) $\frac{e^xe^y}{e^{x-y}}$

Exercice 3
Simplifie chacune des expressions a, b et c suivantes : $a=\dfrac{e^{2x}}{e^x}$; $b=\dfrac{e^{-2x}}{e^{-3x}}$; c=$\dfrac{e^{5x}\times e^{-2x}}{e^{-x+2}}$.

Exercice 4
Simplifie l'expression suivante : $\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$.

Exercice 5
Développe l'expression suivante : $\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)$.

Exercice 6
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées :
a) $e^{3-x}=1$ b) $e^{2x^2+3}=e^{7x}$ c) 2-$e^x=0$
d) $(e^x-2)(e^{-x}+1)=0$ e) $e^{2x}-2e^x-3=0$ f) $e^{x+1}=e^{\frac{2}{x}}$

Exercice 7
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x en posant $X=e^x$.
a) $e^{2x}+e^x+3=0$; b) $e^{2x}+e^x-2=0$; c) $e^{2x}-2e^x+1=0$; d) $-3e^{2x}-9e^x+12=0$.

Exercice 8
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $e^{3x}-e^x=0$; b) $(5-x)(e^{2x}-1)=0$; c) $e^{2x}-2e^x+1=0$; d) $\dfrac{x\left(e^x-1\right)}{x^2+1}=0$.

Exercice 9
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $e^{x^2+x+1}=e\times e^{x+3}$; b) $(x^2+x-2)(e^{2x+1}-1)=0$; c) $\dfrac{e^{-x+2}-e}{x^2+1}=0$.

Exercice 10
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
a) $e^x-3\geq 0$ b) $2e^{2x}-3e^x-2\leq 0$

<u>Exercice</u> 11
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x.
a) $e^{x+1} \geq 1$; b) $e^{-x+1} \leq 1$; c) $e^{-2x+1} \geq e^{x}$; d) $e^{x^2+1} \geq e^{x-2}$.

<u>Exercice</u> 12
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x. après avoir déterminé leur ensemble de validité :
a) $e^{2} - e^{2x} \geq 0$; b) $(e^{x}+1)(e^{-x}-1) \leq 0$; c) $\frac{e^{x}+1}{x+2} \geq 0$; d) $\frac{x\left(e^{-x}-1\right)}{x-3} \geq 0$.

<u>Exercice</u> 13
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x. après avoir déterminé leur ensemble de validité :
a) $e^{2x+3} \leq e^{-x}$; b) $(3x^2 - x + 2)(e^{-x} - 1) \leq 0$; c) $(3x+1)e^{-x-1} < 0$; d) $\frac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} \geq 0$.

<u>Exercice</u> 14
Détermine la limite des fonctions suivantes en a :
a) $f(x) = e^{x} - 2x + 1$, $a = -\infty$; b) $g(x) = -e^{x} - x - 3$, $a = +\infty$;
c) $h(x) = xe^{x} - x^2 - 2x + 2$, $a = 0$.

<u>Exercice</u> 15
Détermine la limite des fonctions suivantes en a :
a) $f(x) = (2x+1)e^{x} + \frac{1}{x}$, $a = +\infty$;
b) $g(x) = (2x-3)\,e^{-x}$, $a = -\infty$;
c) $h(x) = 2 \times \frac{e^{x}-1}{x} + x^2$, $a = 0$.

<u>Exercice</u> 16
Détermine la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:
a) $f(x) = (2-3x)e^{x}$; b) $g(x) = (x+1)e^{-x}$; c) $h(x) = 3 - 2x + e^{x}$.

Exercice 17
Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule la fonction dérivée de f.
a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^{x}$ c) $f(x) = (1-x)e^{x}$

<u>Exercice</u> 18
Détermine la dérivée de chacune des fonctions f, g et h suivantes :
$f(x) = x^2e^{x}$; $g(x) = \frac{e^{x}}{x-1}$; $h(x) = e^{x} - 3x + 1$.

<u>Exercice</u> 19
Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = (-2x+5)e^x$; $g(x)=(-3x^2+5)e^x$; $h(x)=\frac{e^x-1}{x+1}$; $k(x)=\frac{e^x+2}{e^{x-1}}$.

Exercice 20

Calcule la dérivée et étudie les variations de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = xe^x - 1$; $g(x) = x - 1 + e^x$.

Exercice 21 (Terminale A1 uniquement)

Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f sur ℝ.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2x$

b) $f(x) = 2xe^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

Exercice 22 (Terminale A1 uniquement)

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=3x^2e^{x^3}$; $g(x)=e^x+1$; $h(x)=2xe^{x^2-1}$.

Exercice 23 (Terminale A1 uniquement)

Trouve une primitive sur ℝ de la fonction :

$f : x \mapsto (2x-3)e^{-x^2+3x+1}$

3-2. Exercices de renforcement

Exercice 24

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Choisie la réponse exacte.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Pour tout $x\neq 0$, l'expression $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}$ est égale à....	$\frac{e^x-1}{1-e^{-x}}$	$\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{1-e^{-x}}$
2	L'équation $e^{x^2-x-1}=e^{3x-4}$ a pour solution....	$x=1$ et $x=-3$	$x=-1$ et $x=3$	$x=1$ et $x=3$
3	La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $e^x - 2x$	$+\infty$	$-\infty$	0
4	La dérivée de la fonction f définie pour tout réel x, par : $f(x) = xe^{2x}$ est :	$f'(x) = 2xe^{2x}$	$f'(x) = (2x-1)e^{2x}$	$f'(x) = (1-2x)e^{2x}$

Exercice 25

Simplifie les expressions suivantes :

a) $e^x\times e^{-x}$; b) $(e^{2x})^2\times(e^{-x})^2$; c) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

<u>Exercice</u> 26

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

Détermine la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2) Détermine la limite en 0 de la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{e^x-1}{3x}$.

<u>Exercice</u> 27

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$; b) $g(x)=\dfrac{e^x+2}{x+2}$; c) $h(x)=\dfrac{xe^x}{x+1}$.

<u>Exercice</u> 28

Détermine la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par: $f(x) = e^x - 2x + 3$.

<u>Exercice</u> 29

Pour chacune des fonctions suivantes ;

a) Calcule la dérivée.

b) Etudie les variations.

$f(x) = xe^x - 1$; $g(x) = (-3x^2 + 5)e^x$; $h(x) = x - 1 + e^x$.

<u>Exercice</u> 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^x$.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcule la dérivée f' de f.

c) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

<u>Exercice</u> 31

Résous dans IR chacune des équations suivantes :

a) $e^{x^2}=e^{5x-4}$; b) $e^x-e^{-x}=0$; c) $(e^{-x}-e)(e^{3x}+5)=0$

<u>Exercice</u> 32

Résous dans IR chacune des inéquations suivantes :

a) $e^{-x}\leq e^x$; b) $e^{x+3}-e^{x^2+x-1}\leq 0$.

<u>Exercice</u> 33

Etudie le signe de chacune des expressions suivantes :

$A=(1-x)e^{-x}$; B=$e^{3x}-e^x$; C=$e^x-2e^{-x}+1$; D=$e^{3x}+e^x$; E=$e^{2x}+e^x$ -2

3-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 34

Soit *f* la fonction définie sur [0 ;+∞[par : $f(x)=(2-x)e^{x}$.

a) Calcule la limite de *f* en +∞.
b) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
c) Etudie les variations de *f*.
d) Dresse le tableau de variation de *f* sur [0 ; +∞[.
e) Trace la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).
f) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur [1 ; 2].
g) Déduis-en une étude du signe de $f(x)$.

Exercice 35

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x) = 2 + x + e^{x}$.

a) Calcule la limite de *f* en +∞ et en -∞.
b) Calcule la dérivée *f'* de *f* sur ℝ.
c) Etudie les variations de *f*.
d) Dresse le tableau de variation de *f*.
e) Trace (C_f), représentation graphique de *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).
f) Détermine une primitive de *f* sur ℝ.

Exercice 36

Soit *f* la fonction définie sur]-1 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x+1}$.

1- a) Calcule la limite de *f* en +∞ et en -1.
b) Justifie que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f).
2- Calcule la dérivée *f'* de *f*.
3-Etudie les variations de *f*.
4-Dresse le tableau de variation de *f*.
5-Représente (C_f) dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 37

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = 1 - x + e^{x}$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^{x}}{x}\right)$
   b) En déduis la limite de f en $+\infty$.
4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$
   b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ).
5. a) On admet que f est dérivable sur ℝ. Calcule $f'(x)$.
   b) Résous dans ℝ l'équation $f'(x) = 0$
   c) Résous dans ℝ l'inéquation $f'(x) > 0$
   d) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variations.

6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

7. Trace (C) et (Δ) sur $[-3\,;2]$

Exercice 38 (Bac A2, 2008)
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = (-2x+3)e^{x}$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).
1. Justifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.
2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^{x}$
b) Etudie le signe de la dérivée f' sur $]-\infty\,;2]$.
Déduis-en les variations de f sur $]-\infty\,;2]$.
c) Dresse la tableau de variation de f.
3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
Détermine les coordonnées respectives des points A et B.
4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4		1,8		3,3			$-7,4$

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

4. SITUATION COMPLEXE

<u>Exercice</u> 39

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'une grande chaîne de magasins. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres proportionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.
Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Elle te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'elle devra consacrer à la publicité.
Détermine le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

Quelques corrigés

Exercice 38 (Bac A2, 2008)

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2xe^x + e^x$
$= 0$, car $\lim_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2.a) pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = -2e^x + (-2x+3)e^x$
$= (-2x+1)e^x$

Donc pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$

b) Etudions le signe de la dérivée f' sur $]-\infty\,;2]$.
pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $e^x > 0$.
pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $-2x+1>0$, $x<\frac{1}{2}$
Donc

- pour tout élément x de $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)\geq 0$
- pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$, $f'(x)\leq 0$

Ainsi :

- pour tout élément x de $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, f est croissante
- pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$, f est décroissante

c) Dressons le tableau de variation de f.

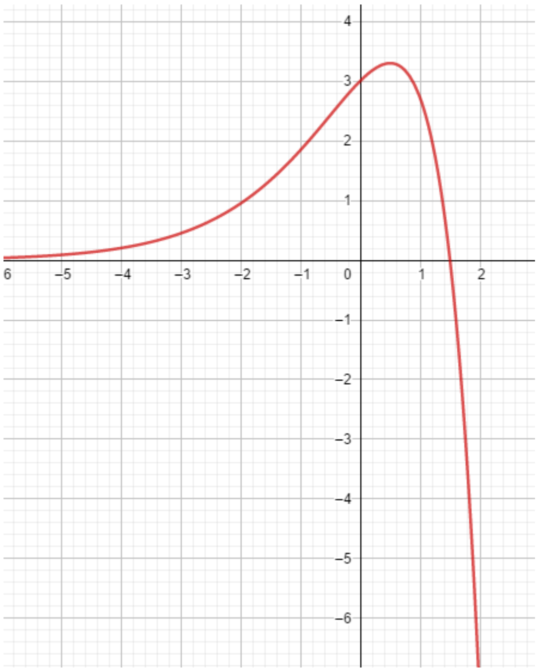
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-e^2$

3) $f(0) = 3$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

On en déduis que : $A(\frac{3}{2} ; 0)$ et $B(0 ; 3)$.

4)

x	-4	-3	-2	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4	1	1,8	3	3,3	2,8	0	$-7,4$

5. 

Situation complexe

Déterminer le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelle offres revient à déterminer le nombre de jour pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteint 90% .

C'est-à-dire : $1 - e^{0,21t} = 90\%$

Soit $e^{-0,21t} = 0,1$

$-0,21t = ln0,1$

$t = \frac{ln0,1}{-0,21}$

$t = 11$

La grande chaîne de magasins fera la publicité pendant 11 jours.