THEME : TRANSFORMATIONS DU PLAN

LEÇON 15 : ISOMETRIES DU PLAN

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans une unité de production de jouets, on utilise deux robots pour déplacer un objet d'un ouvrier A vers un ouvrier B

Ces robots sont installés de telles sortes qu'après avoir marqué deux droites (D) et (D') parallèles sur le sol (surface plane) :

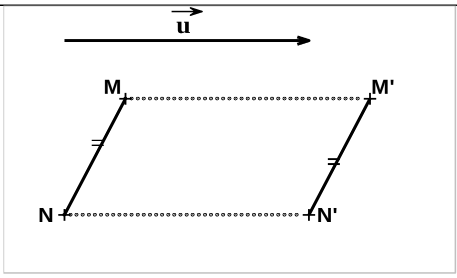
- le premier robot déplace l'objet de l'ouvrier A suivant la symétrie orthogonale d'axe (D)
- le deuxième robot déplace ensuite l'objet suivant la symétrie orthogonale d'axe (D') vers l'ouvrier B

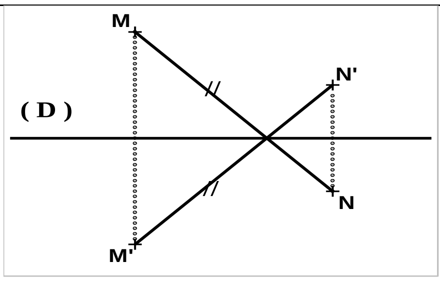
En visite dans cette usine, un des élèves affirme qu'on peut repositionner et reprogrammer un seul robot qui déplacera l'objet d'une seule fois de l'ouvrier A vers l'ouvrier B. Cette information intéresse le chef d'entreprise qui sollicite les élèves.

Les élèves informent sollicitent leur professeur pour vérifier cette information.

B. CONTENU DE LA LECON

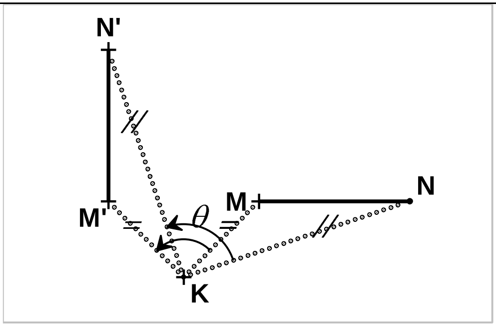
Le tableau suivant présente des applications du plan que nous avons vues dans des classes antérieures.

<table>
<tr><th>Applications du plan dans lui-même</th><th>Représentation géométrique</th><th>Caractérisation et Conséquence</th></tr>
<tr><td>Translation de vecteur $\vec{u}$</td><td>

$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$</td><td>$t_{\vec{u}}$
<table><tr><td>M</td><td>M'</td></tr><tr><td>N</td><td>N'</td></tr></table>
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
Par suite M'N'= MN.
Toute translation conserve la distance.</td></tr>
<tr><td>Symétrie orthogonale $s_{(D)}$ d'axe la droite (D)</td><td>

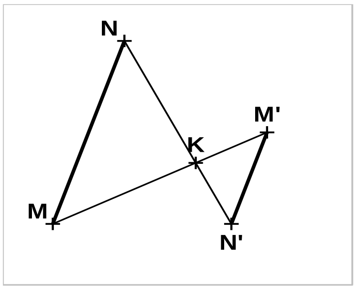
Si $M \notin (D)$
$s_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow$ (D) est la médiatrice du segment [MM'].
Si $M \in (D)$ alors $s_{(D)}(M) = M$</td><td>$s_{(D)}$
<table><tr><td>M</td><td>M'</td></tr><tr><td>N</td><td>N'</td></tr></table>
Les segments [M'N'] et [MN] ont la même longueur.
Par suite M'N'= MN.
Toute symétrie orthogonale conserve la distance.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>K étant un point du plan et θ un réel

Rotation r de centre K et d'angle orienté de mesure θ</td>
<td>

$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} KM' = KM \\ \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}}\right) = \theta \end{cases}$</td>
<td>$\begin{array}{c} r \\ \begin{array}{|c|c|} \hline M & M' \\ \hline N & N' \\ \hline \end{array} \end{array}$
On a :
M'N'= MN
et $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right)=\theta$.

Toute rotation conserve la distance.</td>
</tr>
<tr>
<td>K étant un point du plan et λ un nombre réel

Homothétie h de centre K et de rapport λ</td>
<td>

$h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{KM'} = \lambda\,\overrightarrow{KM}$

Figure pour $\lambda = -\frac{1}{2}$.</td>
<td>$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|c|c|} \hline M & M' \\ \hline N & N' \\ \hline \end{array} \end{array}$

$\overrightarrow{M'N'} = \lambda\,\overrightarrow{MN}$
Par suite
$M'N'=|\lambda|\,MN$
Toute homothétie de rapport différent de 1 et de -1 ne conserve pas la distance.</td>
</tr>
</table>

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition

Une isométrie plane est une application du plan dans le plan qui conserve la distance.

Exemple :

Les translations, les symétries orthogonales, les rotations sont des isométries planes.

2. Propriétés

Toute isométrie plane est une transformation du plan, c'est-à-dire une bijection du plan dans le plan.

Images de figures simples :

Toute isométrie plane f transforme :
- une droite (D) en une droite (D'), un segment [AB] en le segment [f(A)f(B)] ;
- un cercle (C) de centre O en un cercle (C') de centre f(O) et de même rayon.

Propriétés de conservation :

Toute isométrie plane f conserve :
- le produit scalaire : si f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'et f(D) = D', alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'}$;
- le barycentre : si G = bar$\{ (A_i, \alpha_i)_{1\le i\le n} \}$ alors f(G) = bar$\{ (f(A_i), \alpha_i)_{1\le i\le n} \}$;
- le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, le contact.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
Toute isométrie transforme :
a) un carré en un carré ;
b) un triangle équilatéral en un triangle équilatéral ;
c) Un angle droit en un angle plat.

Solution
a) Vrai ; b) Vrai ; c) Faux

II. DÉCOMPOSITION D'UNE TRANSLATION ET D'UNE ROTATION

1. Décomposition d'une translation.

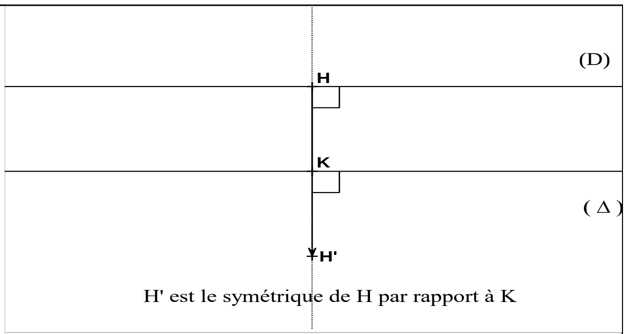
a) Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Si (D) et $(\triangle)$ sont deux droites parallèles, alors la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la symétrie orthogonale d'axe $(\triangle)$ est une translation.

$s_{(\triangle)} \circ s_{(D)} = t_{2\overrightarrow{HK}}$ et $s_{(D)} \circ s_{(\triangle)} = t_{2\overrightarrow{KH}}$

où H est un point quelconque de la droite (D) et K est le projeté orthogonal du point H sur la droite $(\triangle)$.



Remarque : $s_{(\triangle)} \circ s_{(D)} \neq s_{(D)} \circ s_{(\triangle)}$

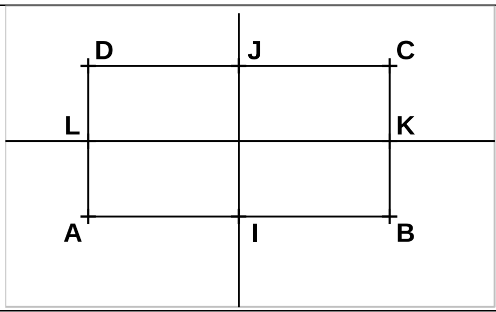
Cas particulier

Pour toute droite (D), la composée de la symétrie d'axe (D) par elle-même est l'application identité du plan. On a: $s_{(D)} \circ s_{(D)} = Id_{(\mathcal{P})}$.

<u>Exercice de fixation</u>

$ABCD$ est un rectangle. I, J, L et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DC]$, $[AD]$ et $[BC]$.

Détermine les composées $s_{(IJ)} o s_{(AD)}$ et $s_{(IK)} o s_{(IK)}$.

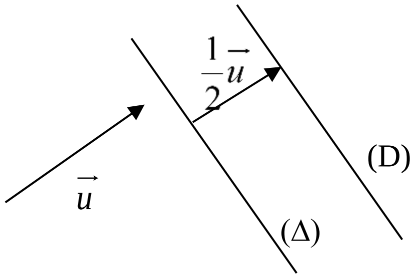


Solution

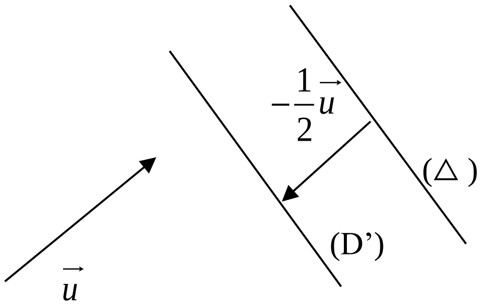
- les droites(IJ) et (AD) sont parallèles et I est le projeté orthogonal de A sur(IJ) donc $s_{(IJ)} o s_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{AI}} = t_{\overrightarrow{AB}}$
- $s_{(IK)} o s_{(IK)} = Id_{(\mathcal{P})}$

b) Décomposition d'une translation

<table>
<tr>
<td>Propriété 1
Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.
Pour toute droite $(\triangle)$ de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (D) telle que :
$t_{\vec{u}} = s_{(D)} \circ s_{(\Delta)}$.

On a : $(D) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\triangle)$.</td>
<td>Illustration graphique

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Propriété 2
Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.
Pour toute droite $(\triangle)$ de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une unique droite (D') telle que :
$t_{\vec{u}} = s_{(\Delta)} \circ s_{(D')}$.

On a : $(D') = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\triangle)$.</td>
<td>Illustration graphique

</td>
</tr>
</table>

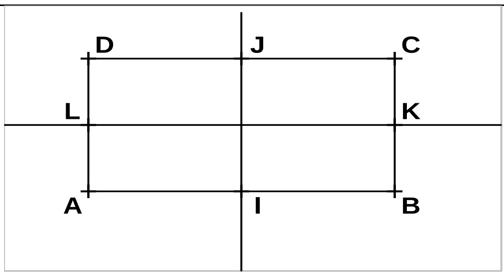
Remarque

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul tel que : $t_{\vec{u}} = s_{(D')} \circ s_{(D)}$:

• Si la droite (D) est donnée alors $(D') = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$;

• Si la droite (D′) est donnée alors $(D) = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D')$.

<u>Exercice de fixation</u>

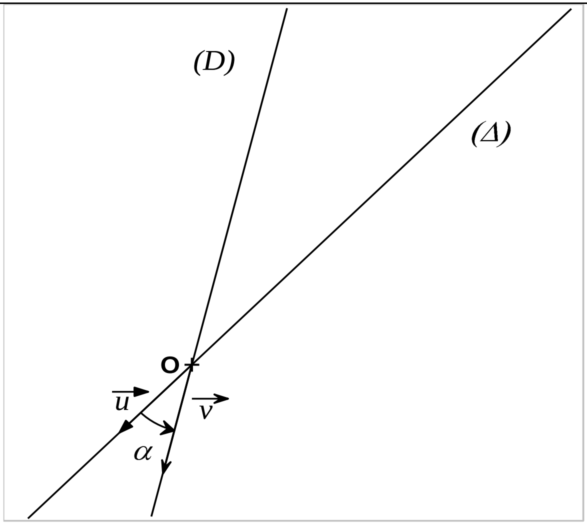
<table>
<tr>
<td>ABCD est un rectangle. I, J, L et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [DC],[AD] et [BC].
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(AD)} \circ s_{(IJ)}$;
2. $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(BC)} \circ s_{(IJ)}$;
3. $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(IJ)} \circ s_{(AD)}$;
4. $t_{\overrightarrow{AD}} = s_{(AB)} \circ s_{(KL)}$;
5. $t_{\overrightarrow{AD}} = s_{(CD)} \circ s_{(KL)}$;
6. $t_{\overrightarrow{AD}} = s_{(KL)} \circ s_{(AB)}$;</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Solution :

1-F ; 2-V ; 3. V; 4-F ; 5-V ; 6-V.

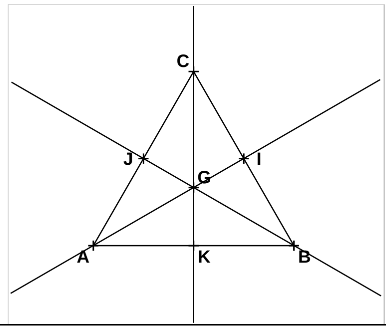
2. Décomposition d'une rotation

a) Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété : Le plan est orienté. $(\triangle)$ et (D) sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On pose : $\alpha = Mes\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Si $(\triangle)$ et (D) sont sécantes en un point O, alors la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la symétrie orthogonale d'axe $(\triangle)$ est une rotation. Le centre de cette rotation est O et son angle a pour mesure 2α. $s_{(\mathrm{D})} \circ s_{(\triangle)} = \mathrm{r}_{(\mathrm{O}\,,2\,\alpha)}$	

Cas particulier
Lorsque les droites $(\triangle)$ et (D) sont perpendiculaires en O, la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la symétrie orthogonale d'axe $(\triangle)$ est la symétrie centrale de centre O.
$s_{(\mathrm{D})} \circ s_{(\triangle)} = s_{(\triangle)} \circ s_{(\mathrm{D})} = s_{\mathrm{O}}$

<u>**Exercice de fixation**</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de centre G. I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Détermine les composées 1 - $s_{(AI)} \circ s_{(AB)}$ 2 - $s_{(AI)} \circ s_{(CK)}$ 3 - $s_{(CB)} \circ s_{(AI)}$	

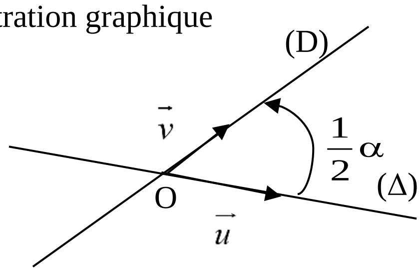
Solution

1- Les droites (AI) et (AB) sont sécantes en A donc $s_{(AI)} \circ s_{(AB)} = r_{\left(A,2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}\right)\right)} = r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$

2- Les droites (AI) et (CK) sont sécantes en G donc $s_{(AI)} \circ s_{(CK)} = r_{\left(G,2\left(\widehat{\overrightarrow{GK},\overrightarrow{GI}}\right)\right)} = r_{\left(G,\frac{-2\pi}{3}\right)}$

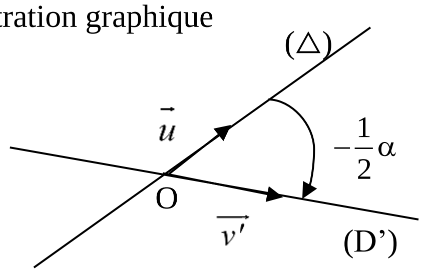
3- Les droites (AI) et (CB) sont perpendiculaires en I donc $s_{(CB)} \circ s_{(AI)} = s_I$

b) Décomposition d'une rotation

Propriété 1 Le plan est orienté. Soit r la rotation de centre O et d'angle α. Pour toute droite $(\triangle)$ passant par O, il existe une unique droite (D) telle que : r $= s_{(\mathrm{D})} \circ s_{(\triangle)}$. (D) est l'image de la droite $(\triangle)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{1}{2}\,\alpha$.	Illustration graphique  $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $(\triangle)$. $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (D). On a ; mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{1}{2}\alpha + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2
Le plan est orienté.
Soit r une rotation de centre O et d'angle α.
Pour toute droite (△) passant par O, il existe une unique droite (D') telle que :
$r = s_{(\triangle)} \circ s_{(D')}$.
(D') est l'image de la droite (△) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{1}{2}\alpha$.

Illustration graphique

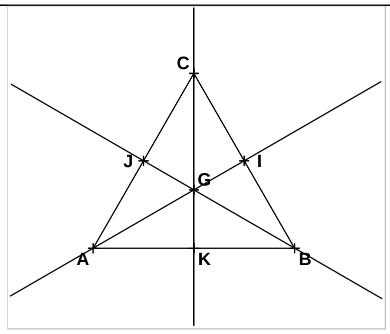


$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (△).
$\vec{v'}$ est un vecteur directeur de la droite (D′).
On a ; $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v'}}) = -\frac{1}{2}\alpha + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$.

Remarque
Soit la rotation r de centre O et d'angle α telle que $r_{(O\,;\,\alpha)} = S_{(D')} o S_{(D)}$:
• Si (D) est une droite donnée alors : $(D') = r_{\left(O\,;\,\frac{1}{2}\alpha\right)}(D)$;
• Si (D′) est une droite donnée alors : $(D) = r_{\left(O\,;\,-\frac{1}{2}\alpha\right)}(D')$.

<u>Exercice de fixation</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de centre *G*.
I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].
Détermine la droite (Δ) dans chacun des cas suivants.
1) $r_{\left(G\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right)} = s_{(\Delta)} \circ s_{(AI)}$.
2) $r_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} = s_{(BG)} \circ s_{(\Delta)}$.
3) $s_K = S_{(\triangle)} \circ S_{(CG)}$



Solution

1).Les droites (AI) et (JB) sont sécantes en G et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{GI},\overrightarrow{GB}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ donc $s_{(JB)} \circ s_{(AI)} = r_{\left(G\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.
Dou (Δ) =(JB) ;
2). (Δ) = (BC) ;
3). (Δ) =(AB)

III. COMPOSÉES D'ISOMÉTRIES

1. Composée d'une translation et d'une rotation

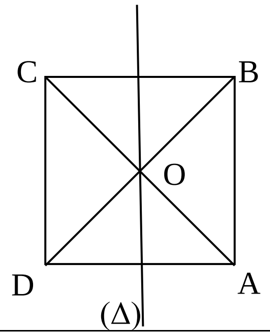
Propriété

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul α est une rotation d'angle α.

Remarques
• Si r est une rotation d'angle nul, alors $r \circ t = t$.
• Si r est une rotation d'angle non nul α, alors $r \circ t$ et $t \circ r$ sont deux rotations d'angle α.
• En général $r \circ t \neq t \circ r$.

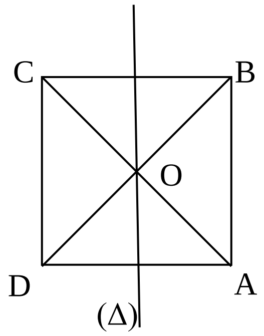
<u>Exercice de fixation</u>

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct.
(Δ) est la médiatrice du segment [CB],
On pose : $f = t_{\overrightarrow{CB}} \circ r_{\left(D\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.



Solution

- La nature de f.
f étant la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Déterminons le centre de f.
On a: $f = t_{\overrightarrow{CB}} \circ r_{\left(D\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$.
Or $r_{\left(D\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} = s_{(DC)} \circ s_{(DO)}$ et $t_{\overrightarrow{CB}} = s_{(\Delta)} \circ s_{(DC)}$.
On a: $f = s_{(\Delta)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(OD)} = s_{(\Delta)} \circ s_{(OD)}$
(Δ) et (OD) se coupent en O. Donc $s_{(\Delta)} \circ s_{(OD)}$ est une rotation de centre O.
En conclusion, $f = t_{\overrightarrow{CB}} \circ r_{\left(D\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} = r_{\left(O\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$



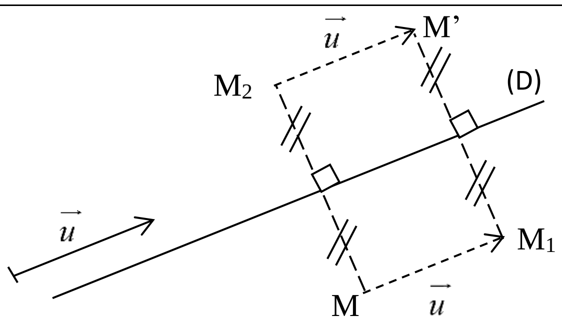
2. Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

a) Symétrie glissée

Définition

Etant donné une droite (D) et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D), on appelle symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur $\vec{u}$, la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

$t_{\vec{u}} \circ s_{(D)} = s_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$



$$M' = s_{(D)}(M_1) = s_{(D)}\big(t_{\vec{u}}(M)\big) = s_{(D)} \circ t_{\vec{u}}(M)$$

$$M' = t_{\vec{u}}(M_2) = t_{\vec{u}}\left(s_{(D)}(M)\right) = t_{\vec{u}} \circ s_{(D)}(M)$$

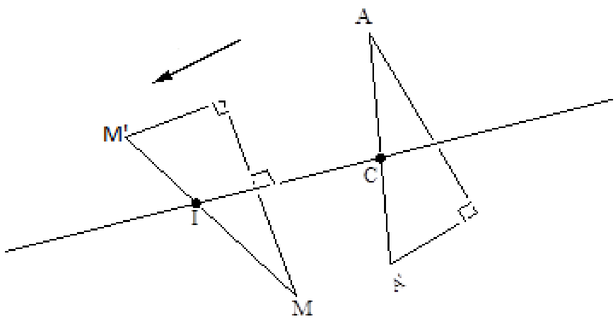
Remarque : une symétrie glissée est caractérisée par son axe et son vecteur.

Propriétés

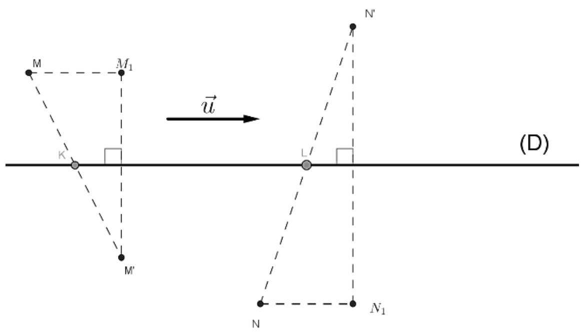
Propriété 1

Une symétrie glissée n’admet pas de point invariant.

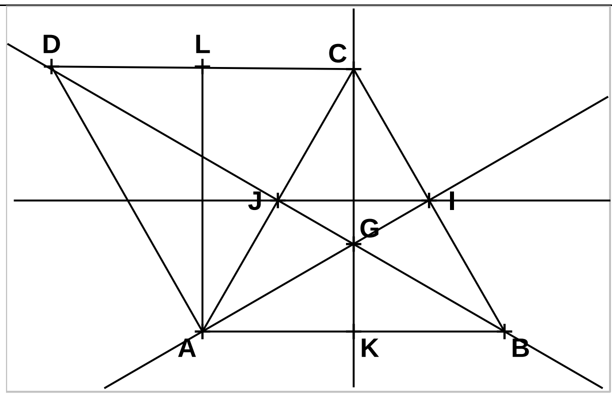
Propriété 2

Le milieu du segment formé par un point M et son image M' par une symétrie glissée f, d’axe (D), appartient à la droite (D).	 $f(M) = M'$ et I milieu de $[MM']$ $f(A) = A'$ et C milieu de $[AA']$ $(D) = (IC)$

Point méthode

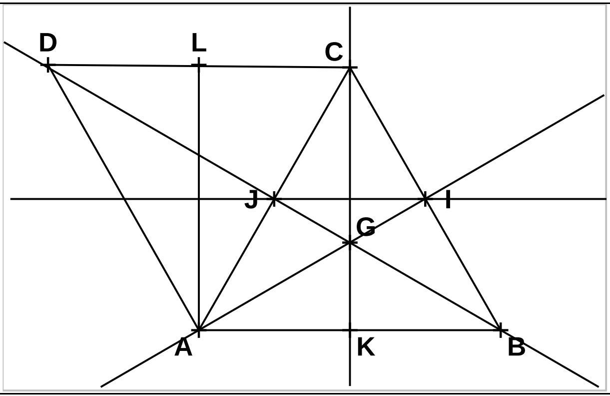
<u>Détermination de l’axe (D) et du vecteur $\vec{u}$ d’une symétrie glissée f</u> • M et N sont deux points distincts donnés, tels que : $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$. K et L sont les milieux respectifs des segments$[MM']$ et $[NN']$. (D) est la droite (KL) . • Soit f une symétrie glissée et $\vec{u}$ son vecteur. Soit A un point donné d’image A’’ par f ∘ f. On a : $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$.	

<u>**Exercice de fixation**</u>

ABC est un triangle équilatéral de centre G. D est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC). I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [BC],[CA], [AB] et [CD]. 1) Soit f la symétrie glissée d’axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{BK}$. Détermine l’image de chacun des points A, B et I par f. 2) Soit g la symétrie glissée telle que : g(C)=B et g(L)=K. Détermine l’axe et le vecteur de g.	

Solution

1) $f(A) = D$; $f(B) = C$ et $f(I) = J$
Plus de details
2) Axe de g passe par les milieux des segments [CB]et [LK], l'axe est (IJ)
Le vecteur de g est $\overrightarrow{KB}$.



b) Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

Propriété

La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul et d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) est :
- une symétrie orthogonale si $\vec{u}$ est normal à (Δ) ;
- une symétrie glissée si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ).

Remarques

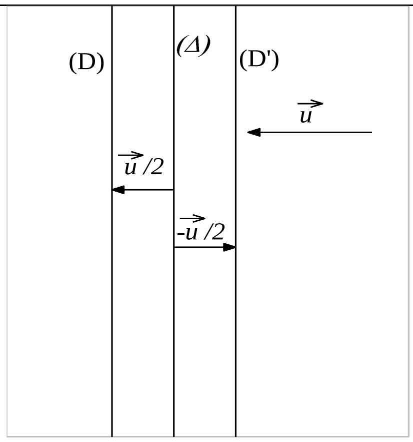
- Si $\vec{u}$ est normal à (Δ), $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ sont deux symétries orthogonales.
- Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ), $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ sont deux symétries glissées.
- En général, $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} \neq t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$.

Illustration graphique

Premier cas : Le vecteur $\vec{u}$ est normal à la droite (Δ).

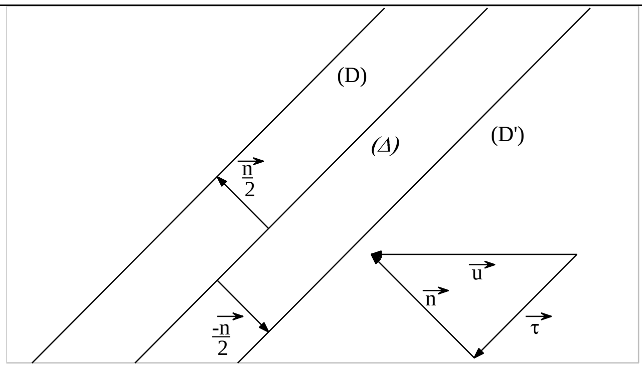
On décompose $t_{\vec{u}}$ en utilisant $s_{(\Delta)}$.
On a : $t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)} o S_{(D')} = S_{(D)} o S_{(\Delta)}$.

On a : $(D)=t_{\frac{1}{2}\vec{u}}((\Delta))$ et $(D')=t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}((\Delta))$.
Posons $f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ et $g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$
$f = s_{(D)} \circ s \circ s_{(\Delta)} = s_{(D)}$.
$g = s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(D')} = s_{(D')}$



Deuxième cas : Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas normal à la droite (Δ)

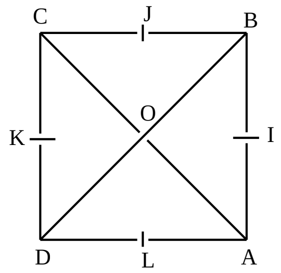
On décompose le vecteur $\vec{u}$ en la somme de deux vecteurs dont l'un est normal à (Δ) noté $\vec{n}$ et l'autre, un vecteur directeur de (Δ), noté $\vec{\tau}$.
$\vec{u} = \vec{n} + \vec{\tau}$
On considère les droites (D) et (D'),
$(D') = t_{-\frac{1}{2}\vec{n}}(\Delta)$ et
$(D) = t_{\frac{1}{2}\vec{n}}(\Delta)$
Posons $f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ et $g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$



On sait que : $t_{\vec{u}} = t_{\vec{n}+\vec{\tau}} = t_{\vec{n}} \circ t_{\vec{\tau}} = t_{\vec{\tau}} \circ t_{\vec{n}}$ et que : $t_{\vec{n}} \circ s_{(\Delta)} = s_{(D)}$ et
$s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{n}} = s_{(D')}$.
Posons : $f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ et $g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$, alors : $f = t_{\vec{\tau}} \circ t_{\vec{n}} \circ s_{(\Delta)}$ et
$g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{n}} \circ t_{\vec{\tau}}$
$f = t_{\vec{\tau}} \circ s_{(D)}$ et $g = s_{(D')} \circ t_{\vec{\tau}}$
f et g sont des symétries glissées.

Exercice de fixation

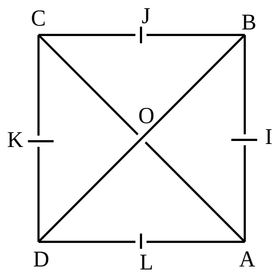
ABCD est un carré de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pose : $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{(JL)}$ et $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{(KI)}$
a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de g.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.



Solution

a)**Nature de g** : Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est normal à la droite (JL). Donc g est une symétrie orthogonale.
Elément caractéristique de g : $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{(JL)}$.
Or $t_{\overrightarrow{BC}} = s_{(CD)} \circ s_{(JL)}$, donc
$g = s_{(CD)} \circ s_{(JL)} \circ s_{(JL)} = s_{(CD)}$.
L'axe de g est la droite (CD).
Conclusion : g est la symétrie orthogonale d'axe(CD).

b) $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{(KI)}$.
Nature de f : Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ n'est pas normal à la droite (KI), donc f est une symétrie glissée.
Eléments caractéristiques de f
On décompose le vecteur $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$t_{\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$
On a: $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{(KI)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(KI)}$.
Or: $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(BC)} \circ s_{(KI)}$.
Donc : $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{(BC)} \circ s_{(KI)} \circ S_{(KI)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{(BC)}$
Conclusion : f est la symétrie glissée d'axe (BC) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$.



Méthode
Posons $f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)}$ et $g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$
• Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est normal à(Δ)
On décompose $t_{\vec{u}}$ en utilisant $s_{(\Delta)}$.
On a :$t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)} o S_{(D')} = S_{(D)} o S_{(\Delta)}$.
On a : $(D) = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$ et $(D') = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.
$f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)} = s_{(D)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} = s_{(D)}$
$g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(D')} = s_{(D')}$

• Lorsque le vecteur $\vec{u}$ n'est pas normal à(Δ)

On décompose le vecteur $\vec{u}$ en la somme de deux vecteurs dont l'un est normal à (Δ) noté $\vec{n}$ et l'autre, un vecteur directeur de (Δ), noté $\vec{\tau}$.
$\vec{u} = \vec{n} + \vec{\tau}$
On considère les droites (D) et (D') telles que :
$(D') = t_{-\frac{1}{2}\vec{n}}(\Delta)$ et $(D) = t_{\frac{1}{2}\vec{n}}(\Delta)$
Comme $\vec{n}$ est normal à (Δ), on a : $t_{\vec{n}} \circ s_{(\Delta)} = s_{(D)}$ et $s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{n}} = s_{(D')}$.
$f = t_{\vec{u}} \circ s_{(\Delta)} = t_{\vec{\tau}} \circ t_{\vec{n}} \circ s_{(\Delta)} = t_{\vec{\tau}} \circ s_{(D)}$
$g = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = s_{(\Delta)} \circ t_{\vec{n}} \circ t_{\vec{\tau}} = s_{(D')} \circ t_{\vec{\tau}}$
$f = t_{\vec{\tau}} \circ s_{(D)}$ et $g = s_{(D')} \circ t_{\vec{\tau}}$
f et g sont des symétries glissées.

3. Composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation

Propriété

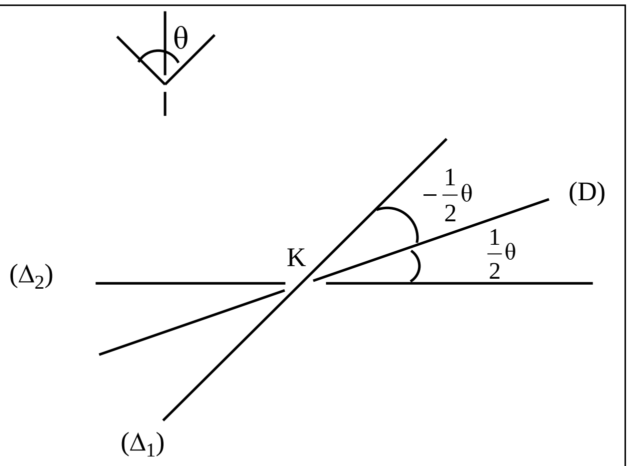
Soient (D) une droite et K un point.
La composée d'une rotation de centre K et de la symétrie orthogonale d'axe (D) est :
- une symétrie orthogonale si $K \in (D)$,
- une symétrie glissée si $K \notin (D)$.

Remarque

Soit r une rotation de centre K.
- Si $K \in (D)$, $s_{(D)} \circ r$ et $r \circ s_{(D)}$ sont deux symétries orthogonales.
- Si $K \notin (D)$, $s_{(D)} \circ r$ et $r \circ s_{(D)}$ sont deux symétries glissées.
- En général: $r \circ s_{(D)} \neq s_{(D)} \circ r$.

Illustration graphique

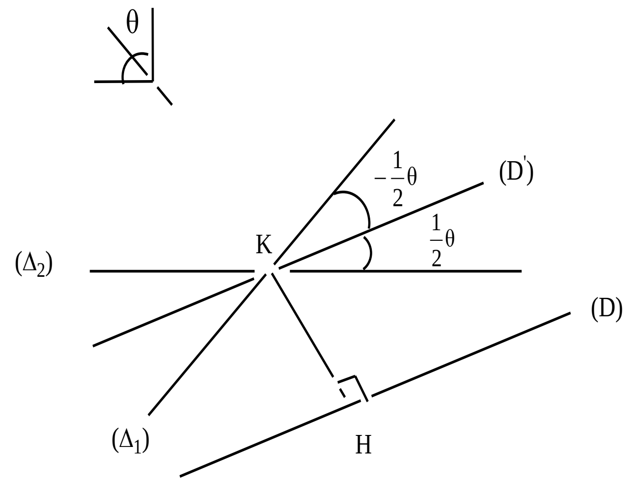
Premier cas : $K \in (D)$

<table>
<tr>
<td>Soit r une rotation de centre K. Notons θ, l'angle de r.
Posons : $f = r \circ s_{(D)}$ et $g = s_{(D)} \circ r$
On décompose r en utilisant $s_{(D)}$.
On a :$r = s_{(D)} \circ s_{(\Delta_1)} = s_{(\Delta_2)} \circ s_{(D)}$
$(\Delta_2) = r_{\left(K\,;\,\frac{1}{2}\theta\right)}(D)$ et
$(\Delta_1) = r_{\left(K\,;\,-\frac{1}{2}\theta\right)}(D')$.
Alors :
$f = s_{(\Delta_2)} \circ s_{(D)} \circ s_{(D)} = s_{(\Delta_2)}$
et $g = s_{(D)} \circ s_{(D)} \circ s_{(\Delta_1)} = s_{(\Delta_1)}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Deuxième cas : $K \notin (D)$

$r = r(K;\ \theta)$
Posons : $f = r \circ s_{(D)}$ et $g = s_{(D)} \circ r$

Soit H, le projeté orthogonal du point K sur la droite (D) et (D′), la droite passant par K et parallèle à (D).
On considère les droites (Δ_1) et (Δ_2) (comme dans le premier cas).
$(\Delta_2) = r_{\left(K\,;\,\frac{1}{2}\theta\right)}\big((D)\big)$ et
$(\Delta_1) = r_{\left(K\,;\,-\frac{1}{2}\theta\right)}\big((D)\big)$.



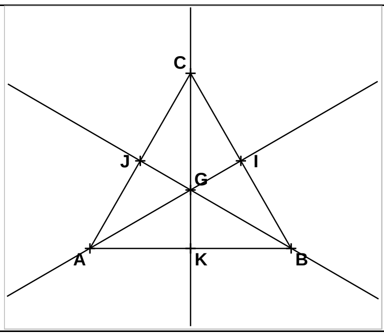
On a: $r = s_{(D')} \circ s_{(\Delta_1)} = s_{(\Delta_2)} \circ s_{(D')}$

Alors : $f = r \circ s_{(D)} = s_{(\Delta_2)} \circ s_{(D')} \circ s_{(D)} = s_{(\Delta_2)} \circ t_{2\overrightarrow{HK}}$
f est une symétrie glissée car le vecteur $\overrightarrow{HK}$ n'est pas normal à la droite (Δ_2).

De même : $g = s_{(D)} \circ r = s_{(D)} \circ s_{(D')} \circ s_{(\Delta_1)} = t_{2\,\overrightarrow{KH}} \circ s_{(\Delta_1)}$
g est une symétrie glissée car le vecteur $\overrightarrow{KH}$ n'est pas normal à la droite (Δ_1)

<u>Exercice de fixation</u>
Le plan est orienté.

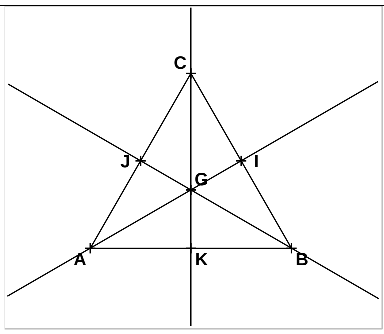
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre G.
I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC],[CA] et [AB].
On pose : $f = s_{(AG)} \circ r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $g = r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ s_{(AB)}$.
a) Détermine f(A) puis la nature et l'élément caractéristique de f.
b) Détermine g(A) et g(B) puis la nature et les éléments caractéristiques de g.



solution

a) $f(A)=s_{(AG)} \circ r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}(A)$
$= s_{(AG)}(B) = C$.
Nature : $G \in (AG)$ donc
f est une symétrie orthogonale.
Elément caractéristique : L'axe de f est la médiatrice du segment [AC] qui est la droite (GB).

b) $g = r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ s_{(AB)}$; g(A)=B et g(B)=C
Nature : $G \notin (AB)$ donc g est une symétrie glissée.
Eléments caractéristiques :
Axe : la droite (KI) Vecteur : $\overrightarrow{JC}$ a detailler



IV. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES

1. Caractérisation d'une isométrie par les points invariants

Propriétés

- Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identique.
- Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B et qui n'est pas l'application identique, est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A, est une rotation de centre A.
- Une isométrie du plan qui ne laisse aucun point invariant, est soit une translation, soit une symétrie glissée.

<u>Exercice de fixation</u>

Remplace les pointillés par le groupe de mots qui convient : 1) est soit une translation, soit une symétrie glissée ;2) est la symétrie orthogonale d'axe (AB) ; 3) est une rotation de centre A ; 4) est l'application identique

A. Une isométrie du plan qui ne laisse aucun point invariant, …………………………..
B. Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A, …………………………
C. Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B et qui n'est pas l'application identique, ……………………………………………………………….
D. Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés …………………

Solution

A – 1 ; B-3 ; C -2 ; D-4

2. Déplacement et antidéplacement

a) Définitions et propriétés

Définitions

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Propriétés

- Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement.
- Tout déplacement est une translation ou une rotation.
- Tout antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.
- La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque :
L'application identique est un déplacement : c'est la translation de vecteur nul ou une rotation d'angle nul.

<u>Exercice de fixation</u>

Réponds par vrai ou faux

1. La transformation réciproque d'un antidéplacement est un déplacement

2. Tout antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.
3. Tout déplacement est une translation ou une rotation.
4. La transformation réciproque d'un antidéplacement est un déplacement.
5. Toute isométrie est un déplacement et un antidéplacement

Solution

1. faux ; 2.vrai ; 3.vrai ; 4.faux ; 5.faux

b) Composition de déplacements et d'antidéplacements

Propriétés

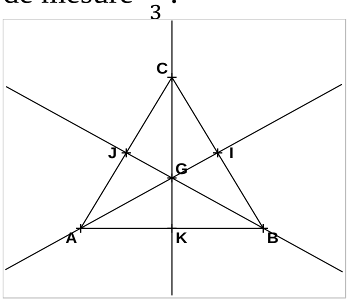
- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

c) Tableau récapitulatif

Ensemble des points invariants	Le plan $\mathcal{P}$	La droite (D)	Le singleton {A}	$\emptyset$
Déplacement	$Id_{\mathcal{P}}$		Rotation de centre A et d'angle non nul	Translation de vecteur non nul.
Antidéplacement		$S_{(D)}$		Symétrie glissée

<u>Exercice de fixation</u>

Le plan est orienté.
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre G.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments[BC], [CA] et [AB].
r est la rotation de centre G et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.



Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient,
On pose : $r \circ r = r^2$.

Isométries	Déplacement	Antidéplacement
r^2		
$s_{(AI)} \circ r$		
$s_{(BJ)} \circ s_I$		
$s_{(BJ)} \circ Id_{(\mathcal{P})}$		
$s_{(BJ)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$		
$s_{(AI)} \circ s_{(CK)}$		
$t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{GI}}$		

Solution

Isométries	Déplacement	Antidéplacement
r^2	x	
$s_{(AI)} \circ r$		x
$s_{(BJ)} \circ s_I$		x
$s_{(BJ)} \circ Id_{(\mathcal{P})}$		x
$s_{(BJ)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$		x
$s_{(AI)} \circ s_{(CK)}$	x	

$t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{GI}}$	x	

V. DÉTERMINATION D'UNE ISOMÉTRIE

1. Détermination d'un déplacement

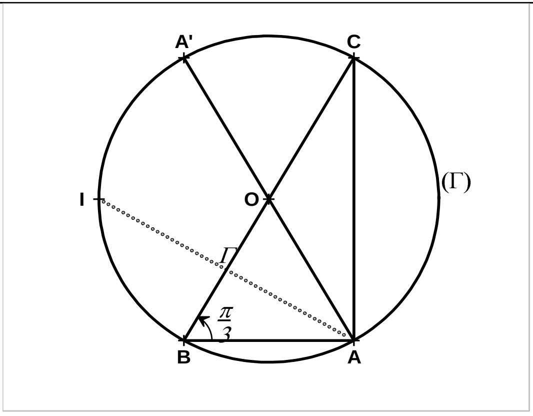
Propriété
Le plan est orienté.

A, B, A' et B' étant quatre points du plan tels que AB=A'B' et A≠B, il existe un unique déplacement f transformant A en A' et B en B'.
◊ Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$;
◊ Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ alors f est une rotation d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}})$.

<u>Exercice de fixation</u>

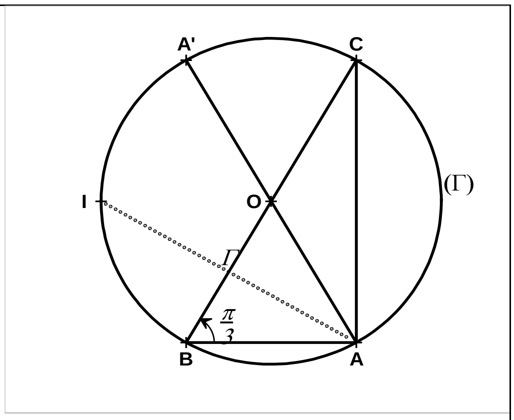
Le plan est orienté.

Soit **(Γ)** un cercle de centre O et de diamètre [BC].
A le point de **(Γ)** tel que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}; \overrightarrow{\mathrm{BC}}}) = \frac{\pi}{3}$,
A′ le point diamétralement opposé à A sur **(Γ)** et I = $s_{(BC)}$(A).
1. justifie qu'il existe une translation f telle que f(A) = C et f(B) = A'.
2.a) justifie qu'il existe un unique déplacement g tel que g(A) = C et
g(B) = O.
b) justifie que g est une rotation dont on précisera l'angle.



Solution

1. f(A)=C et f(B)=A'
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'C}$ d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA'}$
Donc il existe une translation qui applique A sur C et B sur A'. Son vecteur est $\overrightarrow{AC}$.
2.a) g(A)=C et g(B)=O. OA= OB, le triangle OAB est isocèle et possède un angle de $\frac{\pi}{3}$, donc équilatéral. D'où OB =OC donc AB =OC, il existe un unique déplacement g tel que g(A) = C et g(B) = O.
b) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CO}$, donc g est une rotation.
$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{CO}}}) = \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CA'}}; \overrightarrow{\mathrm{CO}}}\right) = \frac{\pi}{3}$.



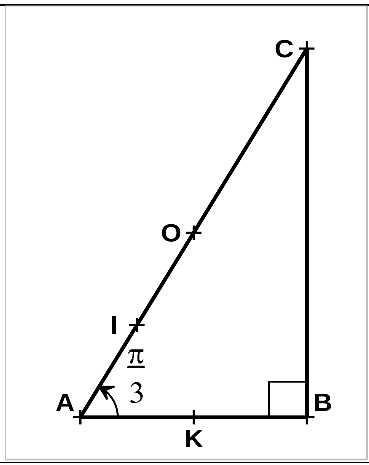
2. Détermination d'un antidéplacement

Propriété

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que AB=A'B' et A≠B.
Il existe un unique antidéplacement g transformant A en A' et B en B'.
◊ Si les segments [AA′] et [BB′] ont la même médiatrice (△), alors g est la symétrie orthogonale d'axe (△).
◊ Si les segments [AA′] et [BB′] ont des médiatrices différentes, alors g est une symétrie glissée.

Exercice de fixation

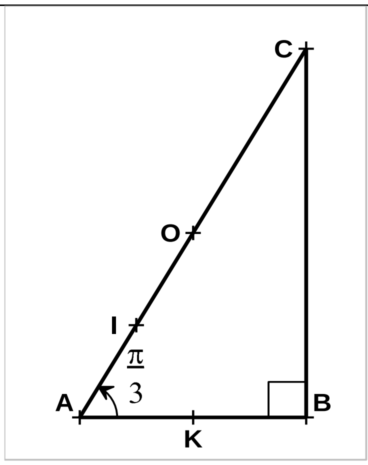
Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B et tel que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
On désigne par O le milieu de [AC] et par I le milieu de [OA] et par K le milieu de [AB].
1) justifie qu'il existe une symétrie orthogonale f qui transforme B en O et K en I.
2) Soit g l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.
justifie que g est une symétrie glissée puis détermine ses éléments caractéristiques.



Solution

1) f(B)=O et f(K)=I
$KB = \frac{1}{2}AB$ et $OI = \frac{1}{2}AO$ or AOB est un triangle équilatéral (car isocèle et possède un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.) Donc AB = AO d'où KB =OI.
Par ailleurs les segments [KI] et [BO] ont la même médiatrice. (En effet AIK et ABO sont des triangles équilatéraux et (KI)//(BO)).
Donc f est une symétrie orthogonale.

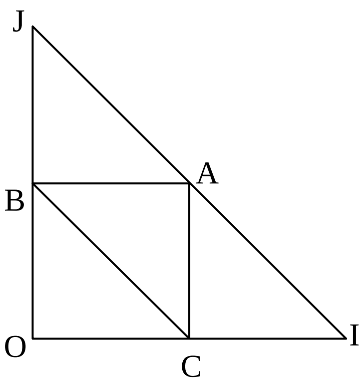
2) g(B)=A et g(A)=O
AOB est équilatéral, donc AB=AO.
Par ailleurs les segments [AB] et [AO] ont des médiatrices différentes.
Donc g est une symétrie glissée.
Axe : droite (KI)
Vecteur : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{KI}$



C- SITUATION COMPLEXE
A changer

Motif dun pagne

Lors d'une sortie détente du club de Mathématiques d'un lycée, on propose un jeu dont le support est la figure ci-contre.
Dans cette figure, les triangles BAC, BOC, CIA, BAJ sont isocèles rectangles et superposables
Ce jeu consiste à trouver les transformations du plan permettant de transformer le triangle CIA en chacun des cinq triangles de la figure.
Aucun élève de terminale C n'ayant participé à cette sortie, les élèves présents éprouvent des difficultés pour trouver toutes les solutions.



En utilisant les outils mathématiques au programme, trouve la solution à ce jeu.

Solution

- **Pour répondre à ce jeu, je vais utiliser les transformations du plan**

- Les cinq triangles sont : CIA ; BAC ; BOC ; BAJ et IOJ

- L'application identique transforme CIA en CIA
- La translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ transforme CIA en BAJ
- La translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$ transforme CIA en BOC
- La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$ et la symétrie orthogonale d'axe (BC) (symétrie glissée) transforme CIA en BAC
- L'homothétie de centre I et de rapport 2 transforme CIA en OIJ

D- EXERCICES

D1- Exercices de fixation

EXERCICE 1

Pour chaque affirmation, écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

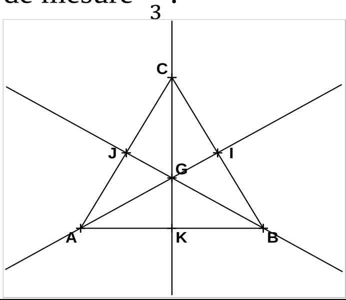
N°	Affirmations	A	B	C
1	Si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont des translations alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} =$	$t_{\vec{u}.\vec{v}}$	$t_{\vec{u}+\vec{v}}$	$t_{\vec{u}-\vec{v}}$
2	Si (D) et (D') sont des droites parallèles et que $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont des symétries orthogonales alors $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est une	Translation	Rotation	Symétrie orthogonale
3	Si r et t sont respectivement une rotation d'angle non nul et une translation alors $r \circ t$ est	Translation	Rotation	Symétrie orthogonale
4	Si $S_{(\Delta)}$ et $t_{\vec{u}}$ sont respectivement une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et une translation de vecteur $\vec{u}$ normal à (Δ) alors $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est	Translation	Symétrie glissée	Symétrie orthogonale
5	Si $S_{(\Delta)}$ et $t_{\vec{u}}$ sont respectivement une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et une translation de vecteur $\vec{u}$ alors $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}$ lorsque	$\vec{u}$ est normal à (Δ)	$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ)	$\vec{u}$ n'est ni un vecteur directeur de (Δ) ni un vecteur normal à (Δ)
6	Si $S_{(\Delta)}$ et r sont respectivement une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et une rotation de centre $O \notin (\Delta)$, alors $S_{(\Delta)} \circ r$ est	Rotation	Symétrie glissée	Symétrie orthogonale

EXRCICE 2

Le plan est orienté.

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre G. I, J et K sont les milieux respectifs des segments[BC], [CA] et [AB].	Complète le tableau suivant en déterminant la composée de chaque élément de la première colonne et de chaque élément de la première ligne. On pose : $r \circ r = r^2$.

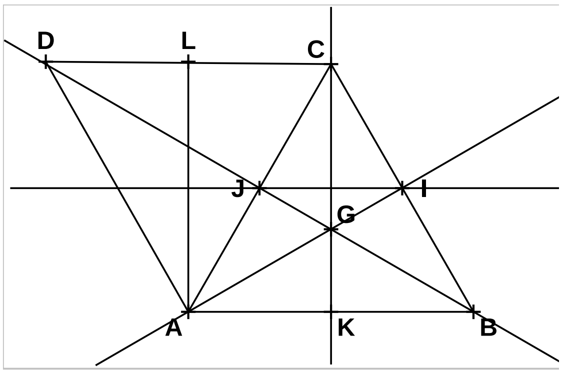
r est la rotation de centre G et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.



$\circ\curvearrowright$	$Id_{(\mathcal{P})}$	r	r^2	$s_{(AI)}$	$s_{(BJ)}$	$s_{(CK)}$
$Id_{(\mathcal{P})}$						
r						
r^2						
$s_{(AI)}$						
$s_{(BJ)}$						
$s_{(CK)}$						

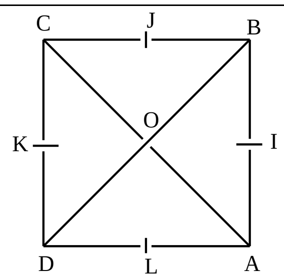
EXERCICE 3

ABC est un triangle équilatéral de centre G. D est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [BC],[CA], [AB] et [CD].
Soit f la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{AK}$.
Détermine l'image de chacun des points A, C, J et L par f.



EXERCICE 4

ABCD est un carré de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pose : $f = S_{(JL)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ et $g = S_{(KI)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$
a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de g.



EXERCICE 5

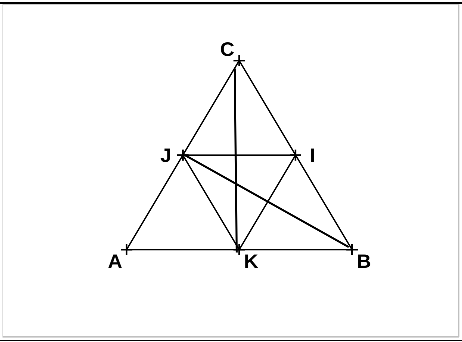
ABCD est un carré direct de centre O. Déterminer la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$.
2. $f = S_{(AC)} \circ r_{(A;\, \pi/2)}$.
3. $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$.
4. $f = r_{\left(C;\, \frac{-\pi}{2}\right)} \circ r_{\left(A;\, \frac{\pi}{2}\right)}$
5. $f = t_{\overrightarrow{2AD}} \circ r_{\left(A;\, \frac{-\pi}{2}\right)}$
6. $f = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$.
7. $f = r_{\left(C;\, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_D \circ r_{\left(A;\, \frac{\pi}{2}\right)}$

EXERCICE 6

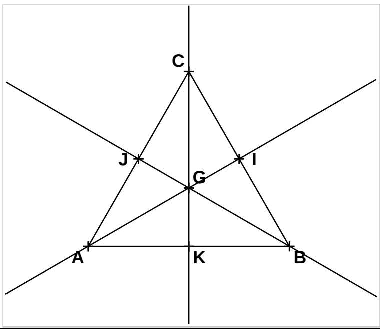
ABC est un triangle équilatéral.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
Dans chacun des cas suivants, détermine la droite (Δ)
1. $t_{\overrightarrow{CK}} = s_{(\Delta)} \circ s_{(IJ)}$

2. $t_{\overrightarrow{JB}} = s_{(IK)} \circ s_{(\Delta)}$
3. $t_{\overrightarrow{IA}} = s_{(\Delta)} \circ s_{(BC)}$
4. $t_{\overrightarrow{AB}} = s_{(CK)} \circ s_{(\Delta)}$



Exercice 7

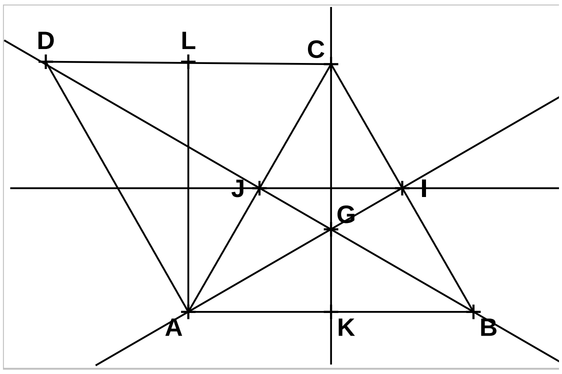
Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de centre *G*.
I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC],[CA] et [AB].
Détermine la droite (Δ) dans chacun des cas suivants.
1) $r_{\left(G\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(CK)} \circ S_{(\Delta)}$.
2) $r_{\left(A\,;\,-\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$.
3) $r_{\left(G\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(BJ)} \circ S_{(\Delta)}$



D-2 Exercices de renforcement

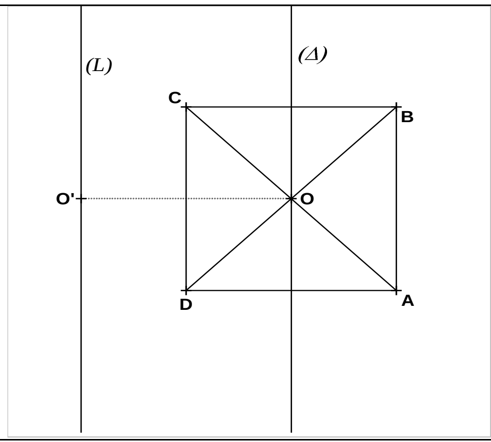
EXERCICE 8

ABC est un triangle équilatéral de centre G. D est le symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [BC],[CA], [AB] et [CD].
Soit f la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{AK}$.
Détermine l'image de chacun des points A, C, J et L par f.



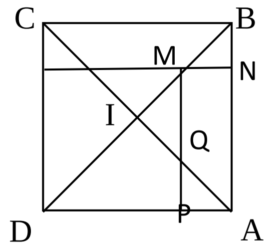
EXERCICE 9

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de sens direct et de centre O, ci-contre.
(Δ) est la médiatrice du segment [CB].
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :
1. $f = r_{\left(D\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$
2. $g = r_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$
3. $h = t_{\overrightarrow{CD}} \circ r_{\left(O\,;\,\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$



Exercice 10

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I, tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})=\frac{\pi}{2}$.
Etant donné un point M du segment [BD] distinct de B et de D, on appelle N et P les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB) et (AD). Q est le point du [MP] tel que le triangle IMQ est rectangle isocèle en I et de sens indirect.
On considère la rotation r de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



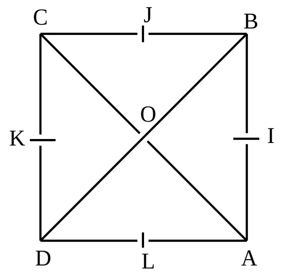
a) Détermine r(B) et r(M).

b) Démontre que r(N) =P.
c) Déduis-en que: $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$.
d) Justifie que : (NC)⊥(BP) et NC=BP.

D-3 exercices d'approfondissement

EXERCICE 11

ABCD est un carré de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pose : $f=S_{(JL)}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$ et $g=S_{(KI)}\circ t_{\overrightarrow{AC}}$
a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de g.



EXERCICE 12

Soit ABCD un quadrilatère convexe de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles rectangles isocèles IAB, JBC, KCD, LDA de sommets respectifs I, J, K, L.
On désigne par O le milieu de [AC].
a) Soit et r_J les rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs I et J.
Étudier la transformation $r_I\circ r_J$. En déduire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
b) Démontrer de même que le triangle OKL est rectangle isocèle en O.
c) Démontrer que $IK = JL$ et que les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.

Exercice 13

Soit Γ un polygone régulier de centre O.
1. Démontre que si f est une isométrie laissant globalement invariant Γ, alors O est invariant par f.
2. Déduis-en que toute isométrie qui n'est pas l'application identique, laissant globalement invariant Γ, est une rotation ou une symétrie orthogonale.

Exercice 14

Soit f une application du plan dans lui-même qui conserve le barycentre et transforme tout repère orthonormé du plan en un repère orthonormé du plan.
Démontre que f est une isométrie plane.

Exercice 15

f et g sont deux isométries planes.
Justifie que :
1) la composée g∘f est une isométrie.
2) la réciproque f^{-1}de f est une isométrie.

Exercice 16

ABCD et AEFG sont des carrés de sens direct et H est le point tel que ADHE soit un parallélogramme. Démontrer que les droites (BH) et (CG) sont perpendiculaires et que BH = CG.

Exercice 17

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par (C) le cercle circonscrit à ABC et O son centre. La médiatrice de [BC] coupe (C) en A et D. On note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).
1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
 a) $S_{(BD)}\ o\ S_{(DC)}$.
 b) $S_{(CA)}\ o\ S_{(AB)}$.
 c) $S_{(DC)}\ o\ S_{(CA)}$.
3) On note $f = S_{(BD)}\ o\ S_C o\ S_{(AB)}$.
a) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f.
b) En déduire la nature de la transformation $S_{(BD)}\ o\ S_C$.

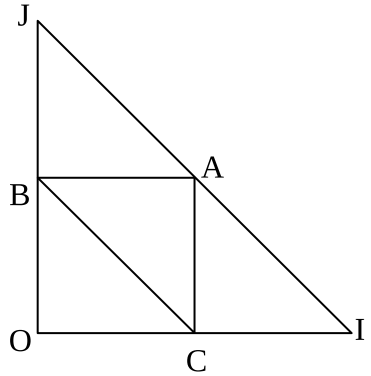
EXERCICE 18

Dans un plan orienté on considère un losange ABCD tel que $AB = BC = CD = DA = 5$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})= \frac{\pi}{3}$. On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD]. On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') celle de [CD].
1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(A) = B$, $f(B) = D$ et $f(D) = C$.
2. a) Prouve que f est un antidéplacement.
b) Démontre que f est une symétrie glissée.
3. Soit $S_{(\Delta)}$la symétrie d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
a) Démontre que $f = r \circ S_{(\Delta)}$.
b) A-t-on $f = S_{(\Delta)} \circ r$?
4. Soit $S_{(BC)}$ la symétrie d'axe (BC).a) Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s telle que $r = S_{(BC)} \circ s$.
b) Déduis-en que f peut s'écrire sous la forme $f = S_{(BC)} \circ t_1$ où $t_1$est une translation dont on précisera le vecteur.
5. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.
a) Détermine $g(D), g(I)$ et $g(O)$. Détermine g.
b) Déduis-en l'axe et le vecteur de f.

C-4 SITUATION COMPLEXE

Exercice 19

Lors d'une sortie détente du club de Mathématiques d'un lycée, on propose un jeu dont le support est la figure ci-contre.
Dans cette figure, les triangles BAC, BOC, CIA, BAJ sont isocèles rectangles et superposables
Ce jeu consiste à trouver les transformations du plan permettant de transformer le triangle CIA en chacun des cinq triangles de la figure.
Aucun élève de terminale C n'ayant participé à cette sortie, les élèves présents éprouvent des difficultés pour trouver toutes les solutions.



En utilisant les outils mathématiques au programme, trouve la solution à ce jeu.

CORRECTIONS D'EXERCICES

EXERCICE 3

$f(A) = C$	$f(C) = B$	$f(J) = I$	$f(L) = K$

EXERCICE 4

$f = S_{(AB)}$ et g est la symétrie glissée d'axe (AD) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 9

1. f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$f = r_{\left(D\,;\frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{CB}} = S_{(DO')} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(L)} = S_{(DO')} \circ S_{(L)} = r_{\left(O'\,;\frac{\pi}{2}\right)}$

On a (DO') est l'image de la droite (DC) par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

(L) est l'image de la droite (DC) par la translation $\frac{-1}{2}\overrightarrow{CB}$

2. g est une rotation.

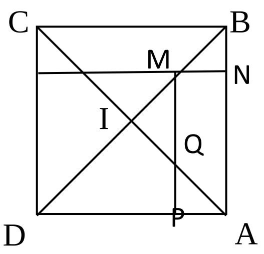
$g = r\left(B\,;\frac{\pi}{2}\right) \circ t_{\overrightarrow{DC}} = s_{(BO)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(OO')} = s_{(BO)} \circ s_{(OO')} = r\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right)$

3. h est une rotation

$h = t_{\overrightarrow{CD}} \circ r\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right) t_{\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{CD}} \circ s_{(AC)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta)} \circ s_{(DC)} = t_{\overrightarrow{CD}} \circ r\left(C\,;\frac{\pi}{2}\right)$

$= s_{(OO')} \circ s_{(BC)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AC)} = s_{(OO')} \circ s_{(AC)} = r\left(O\,;\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 10

	a) r(B)=A et r(M)=Q. b) r(AB) = (AD) et r(MN) = (MP) car M, Q et P sont alignés. Or {N} = (MN)∩(AB) et {P} = (MP)∩(AD) donc r(N) = P c) r conserve le produit scalaire donc r: N → P ; A → D ; B → A $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{r(N)r(A)}\cdot\overrightarrow{r(N)r(B)} = \overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}$ $= \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$.

r	
N	P
A	D
B	A

<table>
<tr><td></td><td>d)
<table><tr><td colspan="2">r</td></tr><tr><td>C</td><td>B</td></tr><tr><td>N</td><td>P</td></tr></table>
Donc (NC)⊥(BP) et NC=BP car r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$</td></tr>
</table>

Exercice 13

1. Soit $\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des sommets de Γ.
O = isobar$\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$. f étant une isométrie , f conserve le barycentre d'un système de points pondérés en particulier f(O) = isobar $\{f(A_i), 1 \leq i \leq n\}$.
Or f(Γ) = Γ c'est-à-dire $\{f(A_i), 1 \leq i \leq n\}$ = $\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$. Par suite f(O)=O.

2. Soit g une isométrie différente de l'identité et laissant globalement invariant Γ.
On a : O est un point invariant de g d'après 1) . L'ensemble des points invariants de g est non vide. g est donc soit une symétrie orthogonale, soit une rotation.

Exercice 19

Les cinq triangles sont : CIA ;BAC ; BOC ; BAJ et IOJ

- L'application identique transforme CIA en CIA
- La translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ transforme CIA en BAJ
- La translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$ transforme CIA en BOC
- La composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$ et la symétrie orthogonale d'axe (BC) (symétrie glissée) transforme CIA en BAC
- L'homothétie de centre I et de rapport 2 transforme CIA en OIJ