MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 12 heures Code :

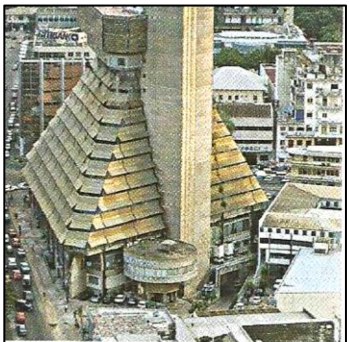
Compétence 3 **Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**

Thème 2 **Géométrie de l'espace**

Leçon 16 : VECTEURS DE L'ESPACE

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un professeur des arts plastiques demande à ses élèves de faire le dessin d'un bâtiment qui les a le plus marqués.
Un de ces élèves va voir son frère en classe de première C pour lui demander de l'aider à reproduire la pyramide du plateau dont la photo est ci-contre.
Désireux d'avoir le plus beau dessin, les deux élèves décident d'utiliser des vecteurs de l'espace pour mieux reproduire cette image.



a « pyramide » d'Abidjan-Plateau.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I- VECTEURS, DROITES ET PLANS

L'ensemble des vecteurs du plan P est noté V. L'ensemble des vecteurs de l'espace ξ sera noté $\mathscr{W}$.

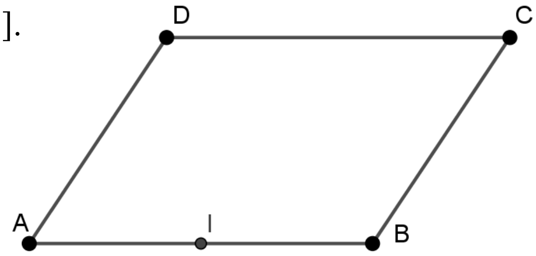
1- Vecteurs colinéaires

Propriété 1

- Deux vecteurs sont colinéaires si l'un des deux est nul ou s'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,u$.

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$.



1) Justifie que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

2) Exprime $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$

Solution

1) ABCD est un parallélogramme donc $(AB)//(DC)$. On a I $\in(AB)$. D'où $(AI)//(DC)$. Alors $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

2) I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ par conséquent $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Propriété 2

Soit A un point de ξ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$.

L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, $(k \in \mathbb{R})$ est la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (ou droite de repère (A, $\vec{u}$)).

On la note : D(A, $\vec{u}$).

Exercice de fixation

Soit B un point de ξ et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$.

Détermine l'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{BM} = k\vec{v}$ avec k un réel.

Solution

$\vec{v}$ est un vecteur non nul et B est un point de ξ. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} = k\vec{v}$ avec k un réel est donc la droite D(B, $\vec{v}$).

Remarques

Soit A et B deux points distincts de ξ.

- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $(k \in \mathbb{R})$ est la droite (AB).

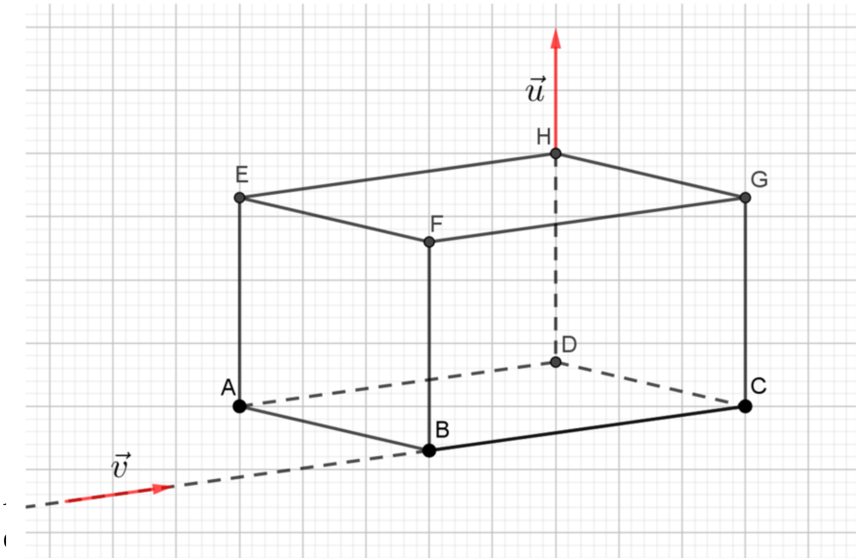
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $(k \in [0; +\infty[)$ est la demi-droite $[AB)$.
- L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $(k \in [0; 1])$ est le segment $[AB]$.

2- Vecteurs orthogonaux

Définition et propriété

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales. On écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsqu'ils sont vecteurs directeurs respectifs de deux droites orthogonales.

Exercice de fixation



est un vecteur

Justifie que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Solution

ABCDEFGH est un pavé droit, donc (HD) est orthogonale à (ABC).
Alors (HD) est orthogonale à (BC). Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs respectifs de (HD) et (BC). Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

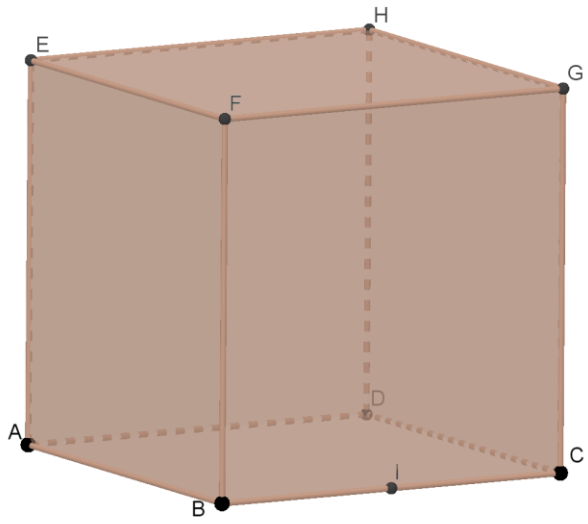
3- Vecteurs coplanaires

Définition 1

Soit A un point de ξ, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$.

L'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$, est un plan de l'espace appelé plan de repère (A, $\vec{u}, \vec{v}$).
C'est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On le note : P(A, $\vec{u}$,$\vec{v}$).

Exemple



ABCDEFGH est un cube et I est le milieu de $[BC]$.

On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$

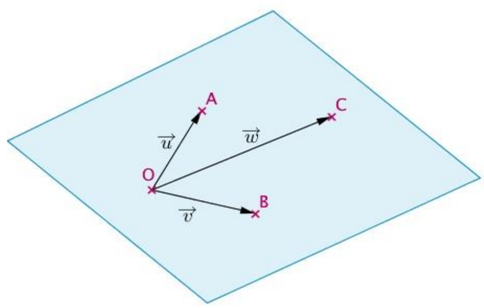
Alors I $\in P\left(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{EF}\right)$.

Remarque

$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 2

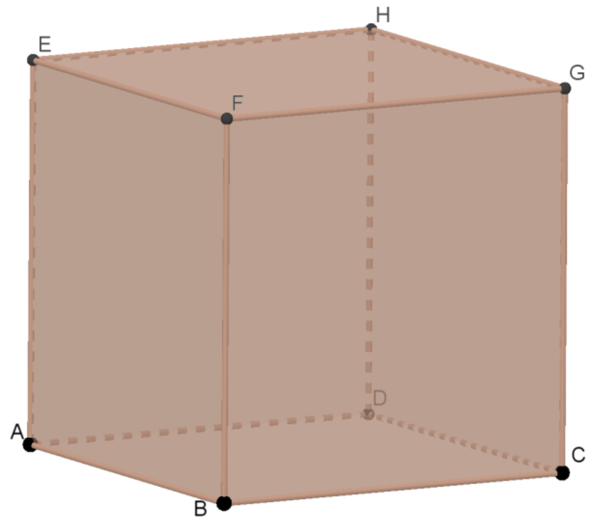
Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires si, étant donnés un point O de l'espace et les points A, B et C définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, les points O, A, B et C sont coplanaires (ou appartiennent à un même plan).



Autrement dit :

Des vecteurs (au moins au nombre de trois) sont dits coplanaires s'il est possible de construire un représentant de chacun d'eux dans un même plan.

Exemple :



ABCDEFGH est un cube.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car ils sont situés dans le même plan (ABF).

Remarques

- Cette définition est indépendante du choix du point O.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont toujours coplanaires.
- Si deux des trois vecteurs de l'espace sont colinéaires, alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.
- Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont non coplanaires si et seulement si les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

<u>Propriétés</u>

- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (il existe des réels λ *et* μ tels que : $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$).

- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathscr{W}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que ses coefficients soient tous nuls.

Ou

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda,\mu,\nu) \neq (0,0,0)$ et $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$.

- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathscr{W}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (λ,μ,ν) de nombres réels tels que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$ est le triplet $(0,0,0)$.

Ou

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires $\Leftrightarrow$ $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube ; on pose :

$\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$

Montre que les vecteurs $\vec{\imath}$; $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

Solution

Soit 3 nombres réels α, β et γ tels que $\alpha\vec{\imath}+\beta(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \gamma\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right) = \vec{0}$.

On obtient $(\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{\imath}+(\beta+ \gamma)\vec{\jmath} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$.

Or $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires par conséquent

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$.Par suite les vecteurs $\vec{\imath}$; $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

II- BASES ET REPÈRES

1- Bases de $\mathcal{W}$

a) Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que :

$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Exercice de fixation :

ABCDEFGH est un cube.

Justifie que pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$;il existe un et un seul triplet (x, y, z)de nombres réels tels que $\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$.

Solution

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires car les points A , B, D et E sont non coplanaires .

Donc il existe un et un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$; $\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AE}$.

Définitions

- Tout triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires est appelé base de $\mathcal{W}$.
- Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et $\vec{u}$ un vecteur.

L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DH})$ est une base de $\mathcal{W}$.

Soit le vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{DH}$.

On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DH})$

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors : $(\vec{u} + \overrightarrow{u'})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $(\lambda\vec{u})\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

__**Exercice de fixation**__

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour chaque affirmation dans le tableau, une seule réponse est juste. Écris le numéro de l’affirmation et associe la lettre correspondant à la réponse juste.

Vecteur		Coordonnées		
		a	*b*	*c*
1	$\vec{u} + \vec{v}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2	$\vec{u} - 2\vec{v}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
3	$\vec{v} + 3\vec{u}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution

1-b 2-c 3-a

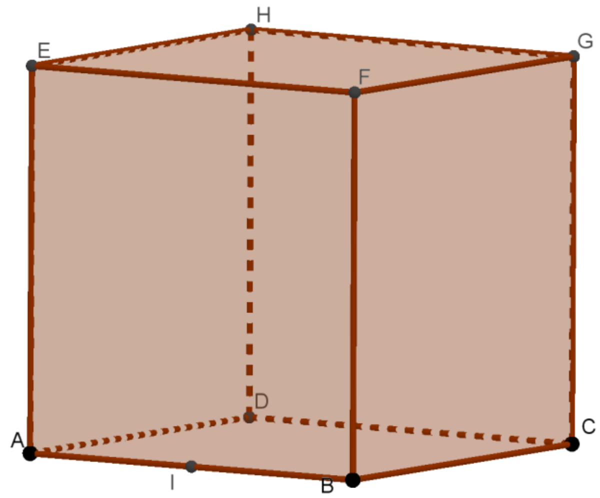
b) Base orthogonale, base orthonormée

Définitions

- Une base est orthogonale lorsqu'elle est constituée de trois vecteurs deux à deux orthogonaux.
  $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthogonale si et seulement si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \perp \vec{k}$ et $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$.
- Une base est orthonormée lorsqu'elle est orthogonale et constituée de trois vecteurs unitaires.
  $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \perp \vec{k}$, $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$ et
  $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube de coté 1 et I est le milieu de $[AB]$



- $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$ est une base orthogonale car $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$.
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est une base orthonormée car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AE}\| = 1$

2- Repères de ξ

a) Définitions et vocabulaire

- On appelle repère de l'espace ξ, un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires ou bien un quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où O est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$.

- Soit (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) un repère et M un point de l'espace ξ.

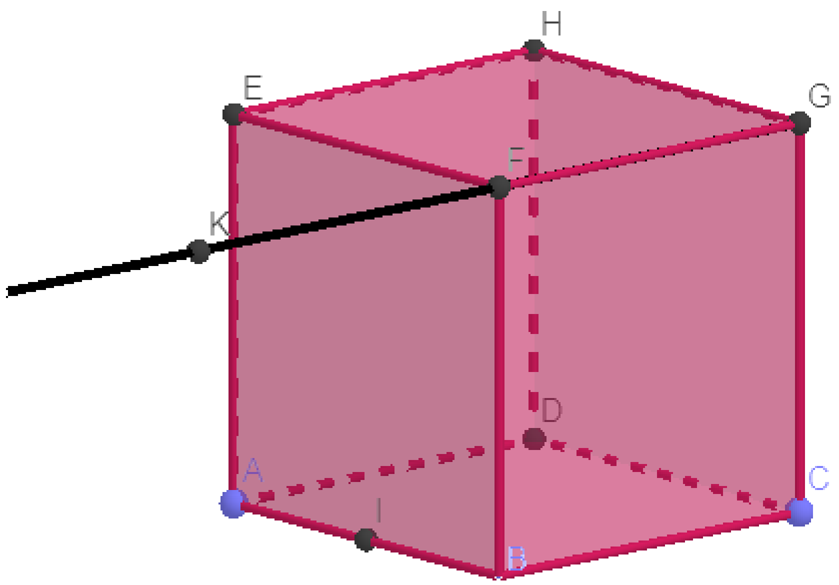
L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).

- Le point O est appelé origine du repère. Les nombres x, y et z sont appelés respectivement abscisse, ordonnée et cote du point M.
- Les droites de repère (O, $\vec{\imath}$), (O, $\vec{\jmath}$) et (O, $\vec{k}$) sont appelées les axes de coordonnées du repère.
- Le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est dit orthogonal lorsque la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est orthogonale.
- Le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est dit orthonormé lorsque la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est orthonormée.

Exemple

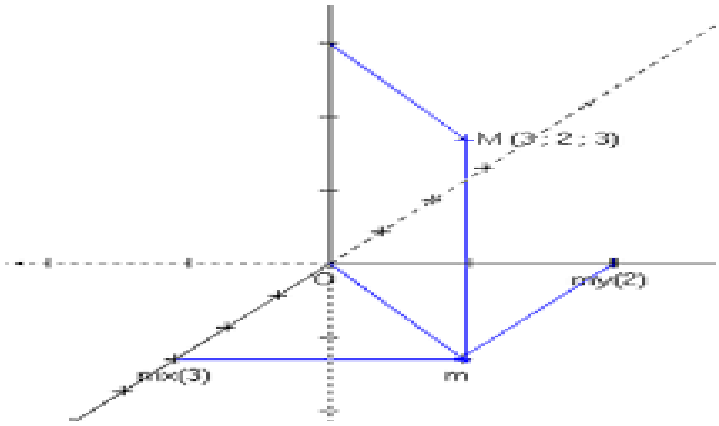
ABCDEFGH est un cube de coté 1 , I est le milieu de $[AB]$ et K est le symétrique de G par rapport F



- $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est un repère car A est un point et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de $\mathscr{W}$.
- $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthogonal car A est un point et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthogonale de $\mathscr{W}$.
- $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé car A est un point et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ **est** une base orthonormée de $\mathscr{W}$.

- On a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ alors $K\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

b) Représentation d'un point dans un repère



Sur la figure, le point $M\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$.

c) Calculs dans un repère

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues à celles établies dans le plan.

Exemple

Soit $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

III- PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1-Définition et propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$ si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Exercice de fixation

ABCD est un tétraèdre régulier de coté a.

Calcule les produits scalaires suivants en fonction de a

1) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD}$
3) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC}$
4) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD}$

Solution

Les quatre faces du tétraèdre ABCD sont des triangles équilatéraux de coté a :

On a :

1) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$
2) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$
3) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$
4) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{CD}=0$

2- Propriétés

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exercice de fixation

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\|\vec{v}\|$

Solution

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=1(2)+2(-1)-3(2)=2-2-6=-6$
- $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

Conséquence

Soit A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) deux points dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

On a : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Exercice de fixation

On donne $A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

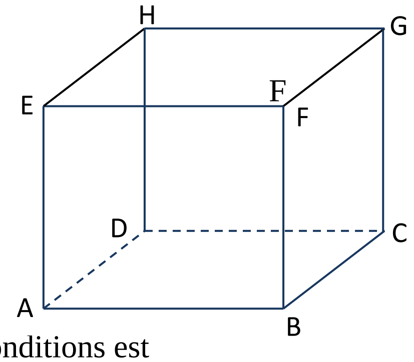
Solution

$\boldsymbol{AB}=\sqrt{(\mathbf{-1-2})^{\mathbf{2}}+(\mathbf{2-3})^{\mathbf{2}}+(\mathbf{1-1})^{\mathbf{2}}}=\sqrt{\mathbf{10}}$

C- SITUATION COMPLEXE

Lors d'une séance de travaux dirigés sur les vecteurs de l'espace, un professeur de mathématiques d'une classe de première C dessine

le cube ABCDEFGH ci-contre au tableau.



Il demande à ses élèves de déterminer les coordonnées

d'un vecteur $\vec{t}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{EG}$.

Après un temps de recherches de 10 minutes, un

élève de la classe affirme que tout vecteur qui vérifie ces conditions est

de la forme $\vec{t}\begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}$, $(\alpha \in R)$ dans la base orthonormée ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$). Son voisin de classe ne partage pas cet avis. Le professeur te sollicite pour les départager.

Dis, en argumentant, lequel des deux élèves a raison.

<u>Solution</u>

Pour départager les deux élèves je vais utiliser la leçon sur les vecteurs de l'espace.
Notamment :
-la détermination des coordonnées d'un vecteur dans une base.
-le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux.

ABCDEFGH est un carré donc $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ est une base orthonormée de W.

Soit $\vec{t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ soit } \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ dans } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right).$$

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ soit } \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ dans } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right).$$

De plus :
$\vec{t} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \vec{t}.\overrightarrow{BH}=0 \Leftrightarrow -x+y+z=0$
$\vec{t} \perp \overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \vec{t}.\overrightarrow{EG}=0 \Leftrightarrow x+y=0$
On a donc :

$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = -x \end{cases}$

Alors pour $x = \alpha; \alpha \epsilon R$ on a $y = -\alpha$ et $z = x - y = 2\alpha$.

Donc $\vec{t}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ avec $\alpha \epsilon\ R$ .Alors c'est le premier élève qui a raison.

D-EXERCICES PROPOSES

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un pavé. Précise dans chaque cas ci-dessous si les vecteurs sont coplanaires ou non.

1) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG}$ 3) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{AC}$

Solution

1) Les vecteurs sont coplanaires.
2) Les vecteurs sont coplanaires.
3) Les vecteurs sont non coplanaires.

Exercice 2

Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Justifie que les vecteurs ci-dessous sont non coplanaires.

1) $\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{k} + \vec{\imath}$ et $\vec{\jmath} + \vec{\imath}$ 2) $2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $2\vec{k} - \vec{\imath}$ et $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Solution

1) Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ trois nombres réels tels que : $\alpha\left(\vec{j}+\vec{k}\right)+\beta\left(\vec{k}+\vec{i}\right)+\gamma\left(\vec{j}+\vec{i}\right)=\vec{0}$. On a :

   $\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}$ donc $\alpha=\beta=\gamma=0$; par conséquent, les vecteurs sont non coplanaires.

2) Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ trois nombres réels tels que : $\alpha\left(2\vec{j}-\vec{k}\right)+\beta\left(2\vec{k}-\vec{i}\right)+\gamma\left(-\vec{j}+2\vec{i}\right)=\vec{0}$.

   On a :

   $\begin{cases} 2\alpha-\gamma=0 \\ -\alpha+2\beta=0 \\ -\beta+2\gamma=0 \end{cases}$ donc $\alpha=\beta=\gamma=0$; par conséquent, les vecteurs sont non coplanaires.

Exercice 3

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de l'espace. Soit $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{\imath} - 6\vec{k}$.

Démontre que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Solution

Soit le triplet(α, β, γ) de nombres réels tels que $\vec{u} + \ \beta\vec{v} + \gamma\,\vec{w} = \vec{0}$.

On a :

$\alpha(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}) + \ \beta(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}) + \gamma\ (\vec{\imath} - 6\vec{k}) = \vec{0}$.

Ce qui donne $(2\alpha + 3\beta + \gamma)\ \vec{\imath} + (\alpha + 2\beta)\vec{\jmath} + (-\alpha + 4\beta - 6\gamma)\vec{k} = \vec{0}$.

Comme $(\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de l'espace, on a :

$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta - 6\gamma = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = -2\beta \end{cases}$

Par exemple pour $\beta = 1$,ona $\alpha = -2$ et $\gamma = 1$.

Ainsi, il existe une combinaison linéaire nulle de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sans que les coefficients ne soient tous nuls. Par conséquent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 4

Soit EFCD un tétraèdre. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(E, -1), (F, 2), (C, 1)$ et $(D, 2)$ et par K le milieu du segment $[FD]$.

Justifie que les points E, C, G et K sont coplanaires .

Solution

On a :

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

Donc

$-\overrightarrow{GE} + 2(\overrightarrow{GK} + \ \overrightarrow{KF}) + \overrightarrow{GC} + 2(\overrightarrow{GK} + \ \overrightarrow{KD}) = \vec{0}$

Ce qui donne

$-\overrightarrow{GE} + 4\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GC} + 2(\overrightarrow{KD} + \ \overrightarrow{KD}) = \vec{0}$

Ou encore

$-\overrightarrow{GE} + 4\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont coplanaires. Par conséquent les points E, C, G et K sont coplanaires.

Exercice 5

Soit $(\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace. On considère $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

1- Démontre que le triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}\ , \vec{w})$ ainsi défini est une base de $\mathcal{E}$.
2- Détermine les cordonnées de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}\ , \vec{w})$.

Solution

1) Soit $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ trois nombres réels tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ soit

$\alpha\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)+\beta\left(-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)+\gamma\left(-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right)=\vec{0}$. On a : $\begin{cases}\alpha-2\beta-\gamma=0\\ \alpha+\beta-2\gamma=0\\ -\alpha-2\beta+4\gamma=0\end{cases}$ donc

$\alpha=\beta=\gamma=0$; par conséquent, les vecteurs sont non coplanaires et dès lors $\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$ est une base de l'espace.

2) On a : $\vec{i}=\vec{u}-\vec{j}+\vec{k}$ on remplace $\vec{i}$ par son expression dans les deux autres égalités, on obtient : $\vec{v}=-2\vec{u}+3\vec{j}-4\vec{k}$ et $\vec{w}=-\vec{u}-\vec{j}+3\vec{k}$

Ce qui donne $\vec{k}=\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}+\frac{3}{5}\vec{w}$, $\vec{j}=2\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v}+\frac{4}{5}\vec{w}$ et $\vec{i}=-\frac{2}{5}\vec{v}-\frac{1}{5}\vec{w}$.

Soit $\vec{i}\begin{pmatrix}0\\ -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$; $\vec{k}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ dans $\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$.

Exercice 6

Soit ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) une base de l'espace.

Soit A(1 ; 2 ; 3), B(-1 ;0 ;4) et C(-2 ;1 ;-3) trois points de l'espace.

1- Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

2- Calcule les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

3- Détermine les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

4- Déduis-en que les points A, B , C et K sont coplanaires.

Solution

1-On obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-7\end{pmatrix}$

2-On a H$\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

3-$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ donc $x_K-x_A=\frac{2}{5}(x_C-x_B)$ soit $x_K=\frac{3}{5}$.

De même on trouve $y_K=\frac{13}{5}$ et z_K=$\frac{1}{5}$.

Donc K$\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{13}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

4-On a $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ donc a $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Alors $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires. Par conséquent les points A, B , C et K sont coplanaires.

<u>Exercice 7</u>

Soit ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) une base orthonormée de l'espace.
On donne les points A(1 ; -2 ; 1), B(-2 ;0 ;3) et C(4 ;1 ;-2).

1- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).
2- Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

<u>Solution</u>

1-On obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\1\\-5\end{pmatrix}$.

2- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ =36 ; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -26$

<u>Exercice 8</u>

L'espace est muni d'une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

1- Calcule : $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u}.\vec{v}$.
2- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ? Justifie ta réponse.
3- Détermine les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ non nul, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

<u>Solution</u>

1-

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.
- De même $\|\vec{v}\| = \sqrt{21}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 2(-1) + 1(2) + 0(4) = 0$.

2- $\vec{u} \perp \vec{v}$ car $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

3-Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.On a donc $\vec{w}.\vec{u} = 0$ et $\vec{w}.\vec{v}$=0.

Ce qui donne $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = -2x \\ -5x + 4z = 0 \end{cases}$.

Par exemple pour $x = 1$ on obtient $y = -2$ et $z = \frac{5}{4}$.

Alors $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$.