MINISTÈRE DE L’EDUCATION NATIONALE
ET DE L’ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D’IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère C
MATHEMATIQUES

CÔTE D’IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 12 heures Code :

Compétence 3	**Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l’espace et aux transformations du plan**
Thème 1	**Géométrie du plan**

Leçon 06 : **Angles orientés et trigonométrie**

Dans cette leçon, le plan est muni d’un repère orthonormé direct$(0, I, J)$.
(C) est le cercle trigonométrique, I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à(C) en I. L’unité de mesure d’angle est le radian.

A- SITUATION D’APPRENTISSAGE

Un élève de 1ère C d’un lycée Moderne fait des recherches sur les équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ dans la salle multimédia de son établissement. Il découvre des équations de types :
$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$ $(a \in \mathbb{R})$; $a\cos x + b\sin x + c = 0$ $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$.
Il présente ses recherches à ces camarades de classe. Ceux-ci constatent que ces équations ne sont pas habituelles. Ils décident d’approfondir leurs connaissances sur la trigonométrie afin de résoudre ces équations.

B- RESUME DE COURS

I) ANGLES ORIENTES

1) Mesures d'un angle orienté

a) Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, tout nombre réel de forme α + 2kπ où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 2k\pi$.

Exemple

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$.

$\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{11\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Remarques

A tout nombre réel x correspond un unique point M de (C) ; donc un unique angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ dont une mesure est x.

- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle orienté sont les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- Toutes les mesures d'un même angle orienté ont le même point image M sur (C).

Notations

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle plat seront notés respectivement $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$.

b) Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre réel $x \in]-\pi\,;\pi]$ tel que Mes($\hat{\alpha}$) = x.

Méthode

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure x est connue, consiste à écrire $\alpha = x + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$;
- Puis l'on détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$.

Exercice de fixation

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $\frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8}$; d'où : $k = 15$.

donc $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) Somme et différence de deux angles orientés

Définitions

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β.

- On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté dont une mesure est α + β.
- Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$, il a pour mesure $-\alpha$.
- La différence des angles orienté $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, noté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté $\hat{\alpha} + (-\hat{\beta})$ dont une mesure est α – β.

Exemple :

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-2\pi}{5}$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{5}$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}$

Remarque

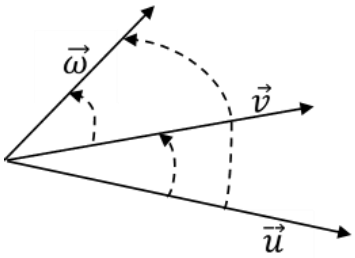
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$

II) PROPRIETES DES ANGLES ORIENTES

1) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.



EXERCICE DE FIXATION

A , B, C et D sont quatre points distincts. Choisis l'égalité correcte :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AC}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}}\right)$

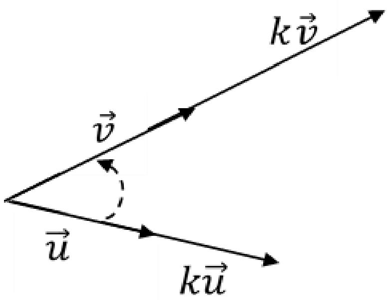
SOLUTION

L'égalité correcte est b)

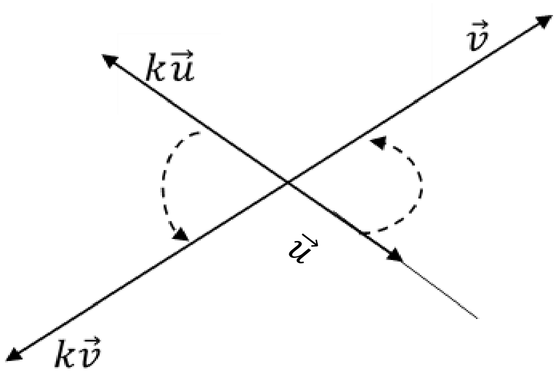
Conséquences

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul on a :

1) $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2) Si k > 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
3) Si k < 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
4) $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$



$k > 0$



$k < 0$

EXERCICE DE FIXATION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Ecris le numéro de l'égalité suivi de VRAI si l'égalité est juste ou de FAUX si l'égalité n'est pas juste.

N°	Égalités
1	$(\widehat{-2\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2	$(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$
3	$(\widehat{7\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},7\vec{v}})$
4	$(\widehat{-5\vec{u},-5\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
5	$(\widehat{\vec{u},4\vec{v}}) = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) + \hat{\pi}$

SOLUTION

1- FAUX ; 2- VRAI ; 3- VRAI ; 4- VRAI ; 5- FAUX

2) Double d'un angle orienté

Définition

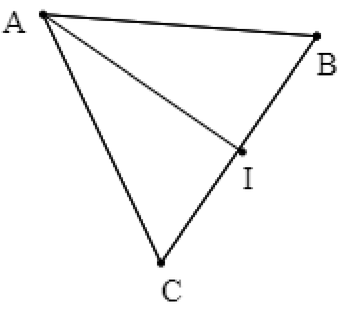
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté.

On appelle double de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et on note $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ l'angle orienté défini par : $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et I le milieu de $[BC]$

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)$



Remarques

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α.
- Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\frac{\hat{\pi}}{2}$ l'angle orienté droit direct. On a :

1) $2\hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi})$
2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta}+\hat{\pi})$
3) $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2}$ ou $\hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2})$

EXERCICES DE FIXATION

A, B et C sont trois points distincts tels $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$.

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

CORRIGÉ

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0} \Leftrightarrow \left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0} \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{\pi}\right)$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

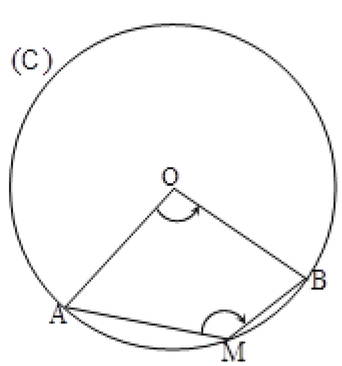
$\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés

3) Angles orientés et cercle

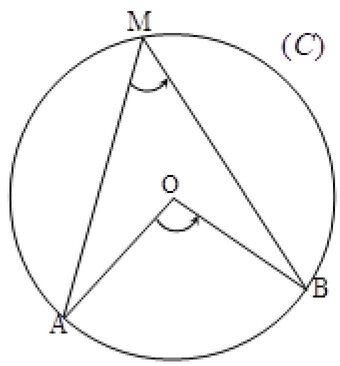
a) Angles orientés inscrits dans un cercle.

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B



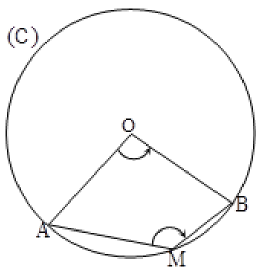
$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + \hat{\pi}$



$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

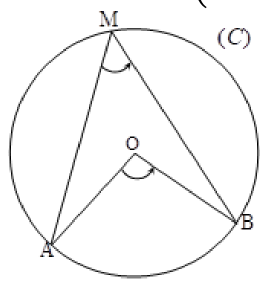
Exercice de fixation

1)On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.



Calcule Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$

2) On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{4}$



Calcule Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

Solution

1) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + \hat{\pi}$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ + mes $\hat{\pi} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

Donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$.

2) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Par suite Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Caractérisation d’un cercle

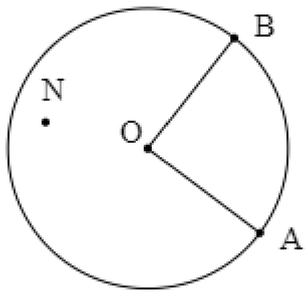
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M du plan distinct de A et B on a :

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

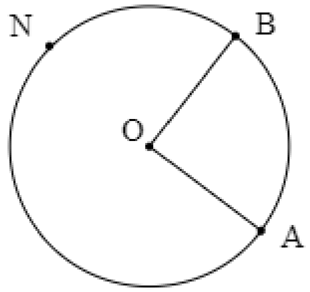
EXERCICE DE FIXATION

Observe les figures ci-dessous et indique dans quel cas on a : $2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

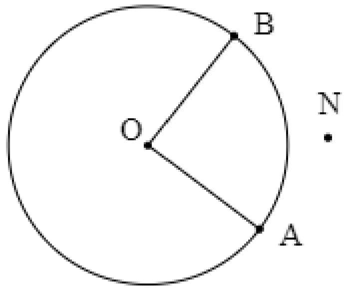
a)



b)



c)



Solution

Figure b)

c) Points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d’entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit ABC un triangle rectangle en C et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Démontre que les points A, B , C et D sont cocycliques.

Solution

Les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et en D

On a : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \hat{\pi}$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) = \hat{\pi}$ donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$. Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

III) TRIGONOMETRIE

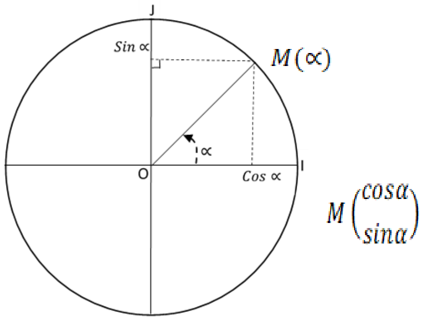
1) Lignes trigonométriques d'un angle orienté

a) Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Définition

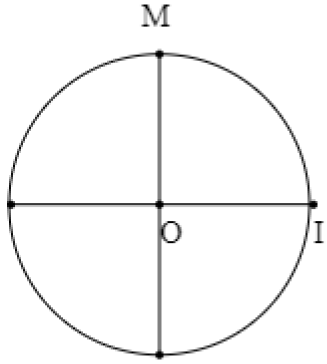
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- Le cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.



Exemple

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad M\binom{0}{1}$



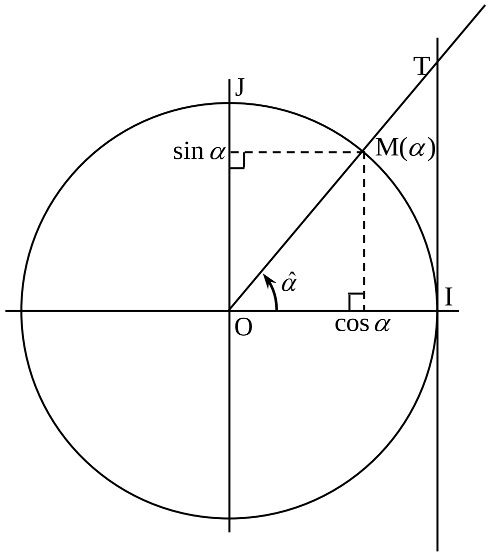
b) Tangente d'un angle orienté

Définition

Soient $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α (α≠$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

La tangente du $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est le nombre réel noté tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ défini par :

tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ = tanα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$



$\tan\alpha = \overline{\mathrm{IT}}$

Exemple

$$tan\pi = \frac{sin\pi}{cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

Remarques

- $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α
  Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- tan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

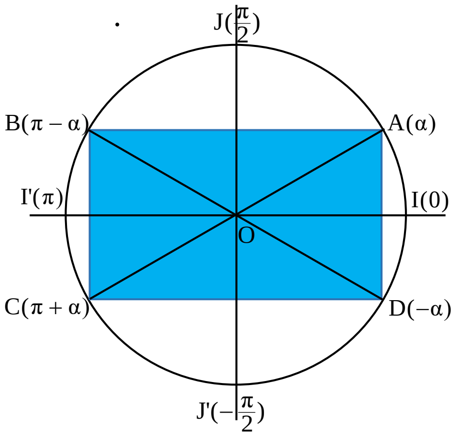
c) Lignes trigonométriques d'angles associés

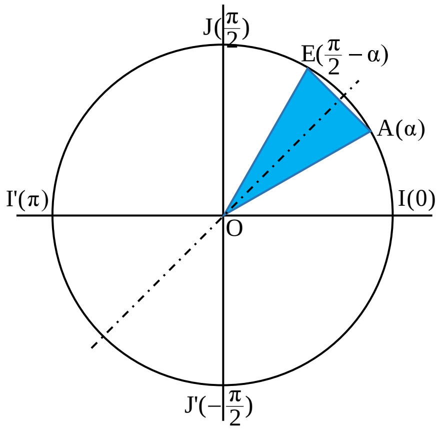
Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α.
Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dit associés à $\hat{\alpha}$

Propriété

Pour tout nombre réel α on a :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$





EXERCICE DE FIXATION

Détermine $cos\alpha$ et $sin\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

2) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$

4) $\alpha = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Solution

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Remarque

Les tangentes des angles associés, non droits, se déduisent des formules précédentes.

Exemple : Pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{sin\alpha}{-cos\alpha} = -tan\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-sin\alpha}{-cos\alpha} = tan\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tan\alpha$$

2) Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) cos (a + b) = cos a cos b − sin a sin b
2) sin (a + b) = sin a cos b +cos a sin b
3) cos (a − b) = cos a cos b + sin a sin b
4) sin (a − b) = sin a cos b − cos a sin b

EXERCICE DE FIXATION

En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, détermine $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Solution

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) Formules de duplication et de linéarisation

Propriété

Pour tout nombre réel a, on a :

Formules de duplication	**Formules de linéarisation**
cos 2a = $cos^2a - sin^2a$ = 2 cos^2a − 1= 1−2 sin^2a sin 2a = 2sin a cos a.	cos^2a = $\frac{1+cos2a}{2}$. sin^2a = $\frac{1-cos2a}{2}$

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.
Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses		
N°	Affirmation	A	B	C
1	$cos^2a - sin^2a$ est égale à	1	$cos2a$	$sin2a$
2	$sin2a$ est égale à	$2sina$	$1 - 2sin^2a$	$2cosa\ sina$
3	$2sin^2a$ est égale à	$1 - cos2a$	$1 + cos2a$	$4sina$
4	$1 + cos2a$ est égale à	$2cos^2a$	$1 - 2sin^2a$	$1 - 2cos^2a$

CORRIGÉ

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-A

3) Fonctions circulaires

a) Fonctions cosinus ; fonctions sinus

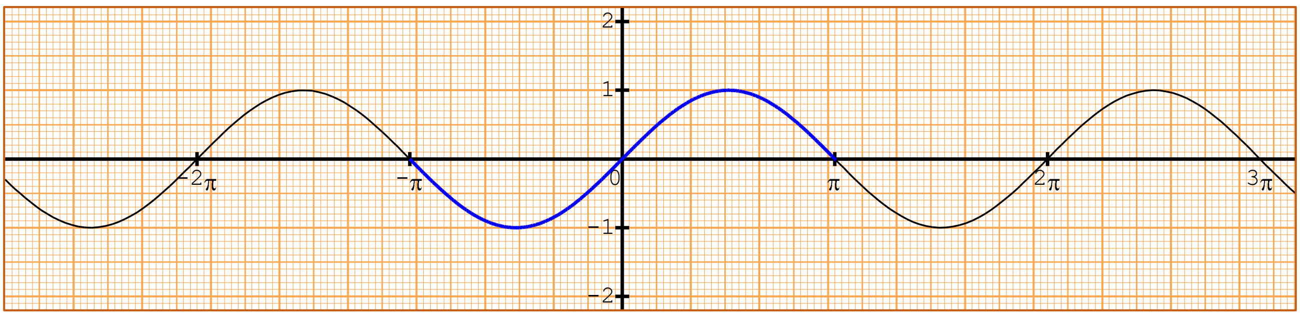
Définitions

- On appelle fonction sinus, la fonction notée sin : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto sinx$
- On appelle fonction cosinus, la fonction notée cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto cosx$

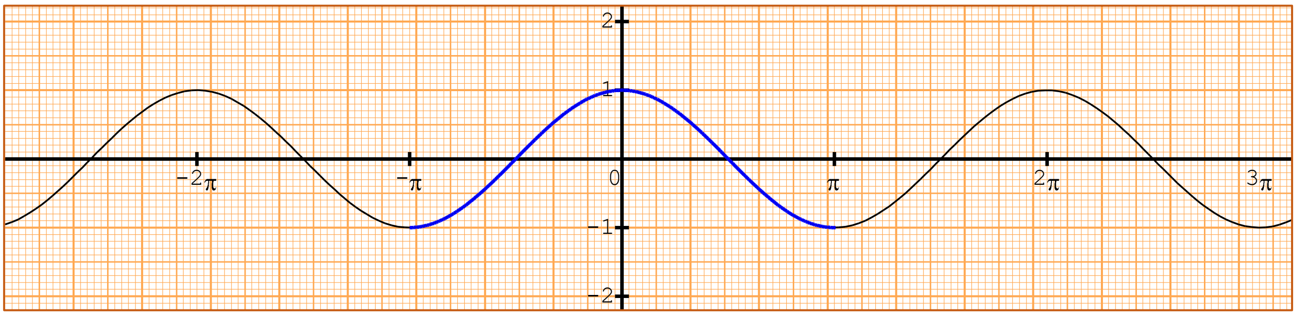
b) Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

Pour construire les courbes représentatives des fonctions : $x \longmapsto$ sin$x$ et $x \longmapsto$ cos$x$, on construit les courbes sur $]-\pi, \pi]$ puis on complète en utilisant les translations de vecteurs $2\pi\overrightarrow{OI}$ et $-2\pi\overrightarrow{OI}$.

Représentation graphique de la fonction sin



Représentation graphique de la fonction cos



b) Fonction tangente

La fonction tangente notée tan est la fonction : tan : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto tanx$$

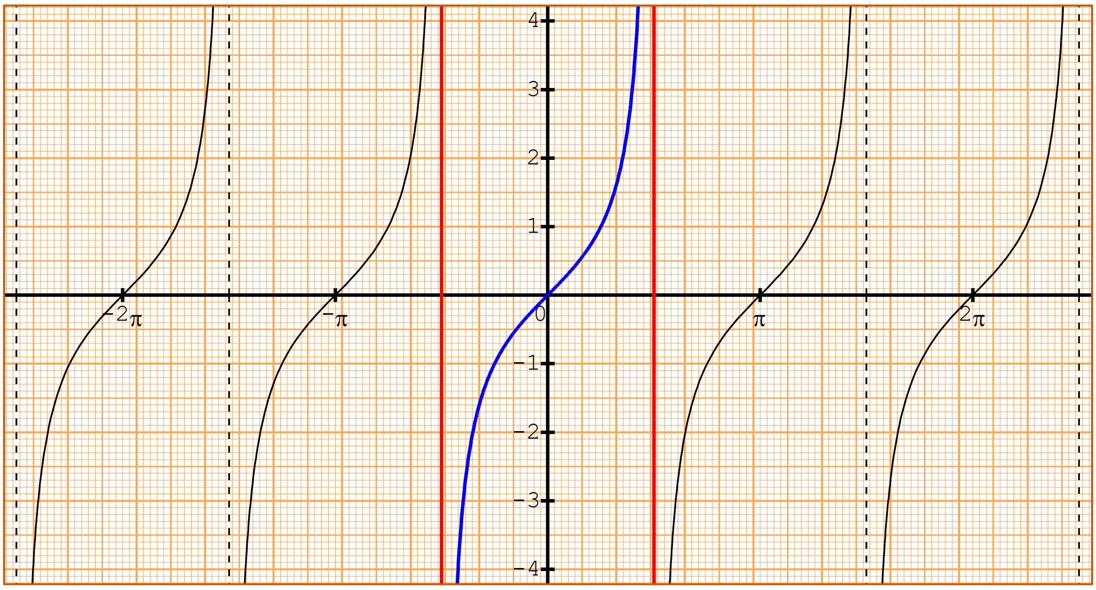
L'ensemble de définition de la fonction tan est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Cette fonction est continue en tout élément de son ensemble de définition

On construit sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis on complète en utilisant les translations de vecteur $\pi \times \overrightarrow{OI}$ et $-\pi \times \overrightarrow{OI}$.

Exemple

Représentation graphique de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthonormé



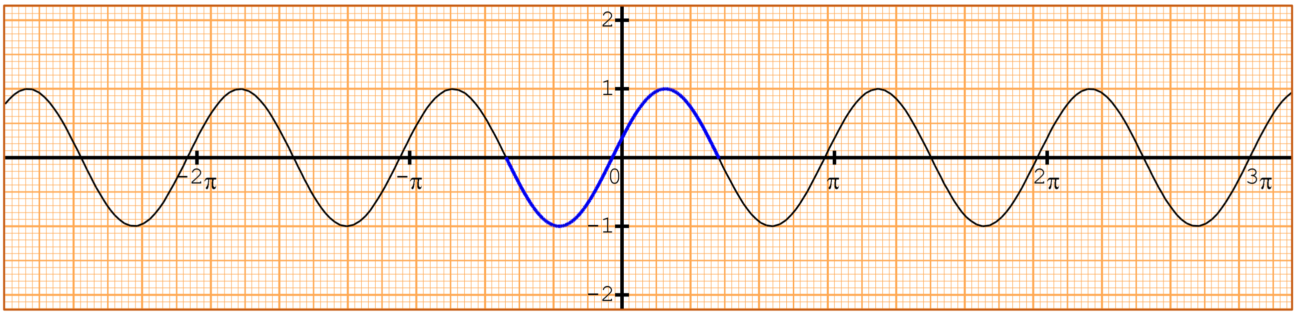
EXERCICE DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Représente graphiquement la fonction :

$f: x \mapsto \cos(2x+5)$

CORRIGÉ

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos(2x+5)$



IV) EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Equations du type : $\boldsymbol{cos\, x = cos\, a}$; $\boldsymbol{sin\, x = sin\, a}$ et $\boldsymbol{tan\, x = tan\, a}$

Propriétés

Pour tous nombres réels x et a, on a :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + \mathrm{k}\pi, \in \mathbb{Z}$ **,** pour x et a différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

a) $cosx = \frac{1}{2}$.

b) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tanx = 1$

SOLUTION

a) On a : $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$.

$$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$$

$$cosx = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$S_{\boldsymbol{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) On a : $\boldsymbol{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$sinx = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>**Remarques**</u> : cas particuliers d'équations trigonométriques

1) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi , k \in \mathbb{Z}$

2) $sx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$

3) $sx = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

4) $sinx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

5) $sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi , k \in \mathbb{Z}$

6) $sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

2) Equations du type : $a\ cos\ x + b\ sin\ x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a\ cos\ x + b\ sin\ x$, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit : $a\ cos\ x + b\ sin\ x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} cos\ x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} sin\ x\right)$
- On détermine un nombre réel α tel que :
$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$
- On écrit ensuite : $acos\ x + bsin\ x = \sqrt{a^2+b^2}\ (cos\alpha\ cosx + sin\alpha\ sinx)$
- Donc : $acos\ x + bsin\ x = \sqrt{a^2+b^2} cos(x-\alpha)$
- On résout l'équation : $cos(x-\alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3}cox + sinx = \sqrt{2}$

Solution

$$\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}cosx + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{6}cosx + sin\frac{\pi}{6}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

V) INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées sous forme d'exercices.

EXERCICE DE FIXATION

a) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_1) : sin x $> -\frac{1}{2}$.

b) Résous dans $[0,2\pi]$, l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

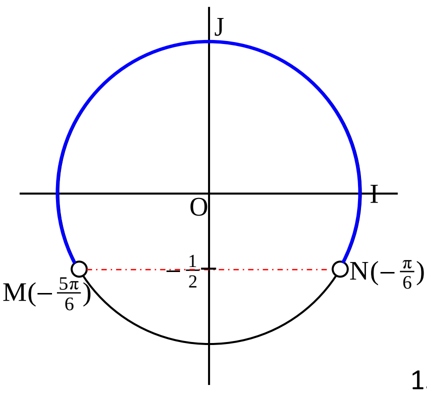
c) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_3): $tan < 1$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1) : sin $x > -\frac{1}{2}$

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

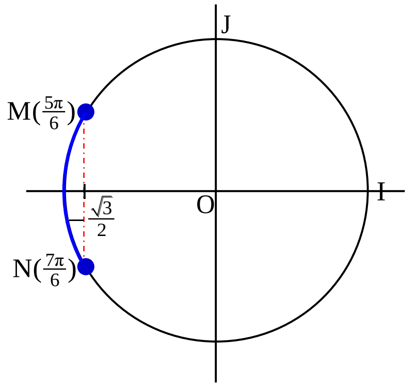
Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$ sont les points du grand arc $\overset{\frown}{MN}$, M et N étant exclus.



Dans $]-\pi,\pi]$ M et N sont les images respectives de $\frac{-5\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6}$.

Donc : $S_{]-\pi,\pi]} = \left]-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

Résolution de l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

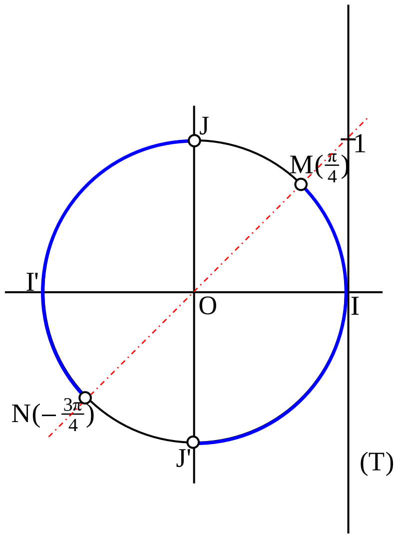


Soient les points M et N du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points du cercle trigonométrique ayant une abscisse inférieure ou égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points du petit arc $\widehat{MN}$, les points M et N étant inclus.

Dans $[0; 2\pi]$, M et M' sont les images respectives de $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

Donc : $S_{[0,2\pi]} = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$

Résolution de l'inéquation (I_3) : $tan < 1$



Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Dans]-π ;π], tan x = 1 $\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

Désignons par N et M les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des petits arcs *JN et J'M ; J, N, J' et M* étant exclus.

Dans]-π ;π], l'ensemble des solutions de (I_3) est donc :

$\left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

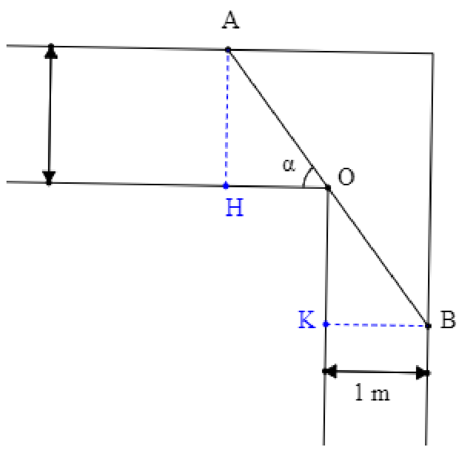
C- <u>SITUATION COMPLEXE</u>

Au cours d'une séance de travaux dirigés en Physique chimie, des élèves de 1ère C découvrent la figure ci-contre :

Cette figure représente un couloir de largeur $\sqrt{3}$ m qui tourne à l'angle droit et cette largeur n'est plus alors que de 1 m

Sur la figure, une droite passe par O fait avec l'un des murs un angle α et coupe les deux autres murs en A et

B $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ \ et\ \ AB = 4\right)$. *L'unité de longueur est le mètre*



En observant la figure, Séri, le chef de classe, affirme que l'angle α admet deux valeurs $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$. Par contre, son voisin affirme que α n'a qu'une seule valeur égale à $\frac{\pi}{3}$. Tu es sollicité pour les départager.

Dis, en le justifiant par une production argumentée, qui de Séri ou de son voisin a raison.

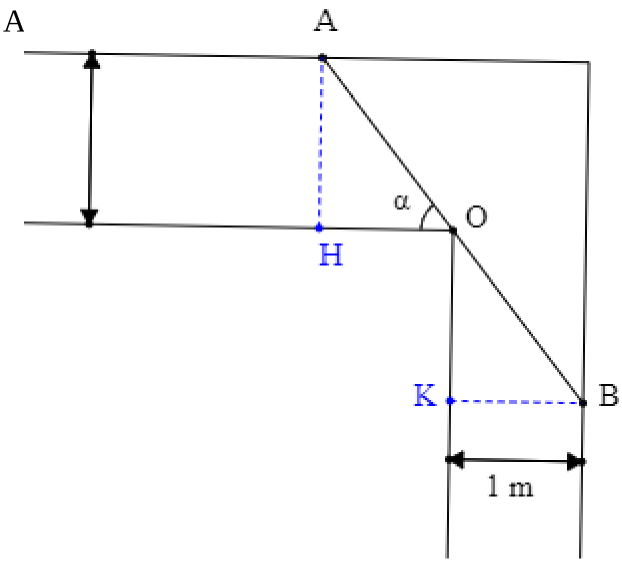
SOLUTION

Pour départager Séry et son voisin, nous allons utiliser nos connaissances mathématiques sur la leçon angles orientés et trigonométrie.

Pour ce faire, Nous allons :

- En fonction des données connues, obtenir une
- équation contenant une ligne trigonométrique de α.
- Résoudre l'équation obtenue pour trouver (si possible) les valeurs de α.

Déterminer une ligne Soit H le projeté orthogonal de A orthogonal de B sur le bord du mur opposé à B.



Le triangle AHO est rectangle en H.

On a : $sin\alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{OA}$;

donc $OA = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha}$

Le triangle BKO est rectangle en K.

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{OB}$

Donc : $OB = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{cos\alpha}$

On a : $AB = OA + OB = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha} + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha}$

Comme $AB = f(\alpha) = 4$, on déduit l'équation (E) : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$

Résolvons l'équation (E) : α ∈ $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$.

- Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on a cosα ≠ 0 et sinα ≠ 0 par suite cosα.sinα ≠ 0. Donc le domaine de validité de (E) est : $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
- $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \iff \sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 4sin\alpha cos\alpha$

Or : $\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 2\left(cos\frac{\pi}{6}cos\alpha + sin\frac{\pi}{6}sin\alpha\right) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ et $4sin\alpha cos\alpha = 2sin2\alpha$

Donc : $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \iff 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2sin2\alpha \iff \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha$

$sin2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$ donc $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha \iff \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \iff \begin{cases} \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \qquad ou \\ \alpha - \frac{\pi}{6} = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \iff \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \qquad ou \\ \alpha = \frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme α appartient à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a deux valeurs de α qui correspondent : $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C'est donc Seri qui a raison.

D- EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{149\pi}{3}$ et place sur le cercle trigonométrique le point M $\left(\frac{149\pi}{3}\right)$.

SOLUTION

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{149\pi}{3} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{149\pi}{3} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{149}{6} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{152}{6} < k \leq -\frac{146}{6}$; d'où : $k = -25$.

donc α = $\frac{149\pi}{3} - 25 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

Parmi les nombres ci-dessous indique ceux qui sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$:

$\frac{\pi}{12}+3\pi$; $\frac{\pi}{12}-6\pi$; ; $\frac{\pi}{12}+2020\pi$; $\frac{\pi}{12}-2021\pi$

SOLUTION

Les mesures l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sont : $\frac{\pi}{12}-6\pi$ et $\frac{\pi}{12}+2020\pi$

Exercice 3

Relie chaque élément du tableau A à l'élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

SOLUTION

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

Exercice 3

Calcule la tangente de l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUTION

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine le sinus et le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α

a) $\alpha=\pi$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

SOLUTION

a) $cos\pi=-1$; $sin\pi=0$

b) $cos0=1$; $sin0=0$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Exercice 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Indique les égalités justes :

a) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

b) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

c) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{0}$

SOLUTION

Les égalités justes sont : a) et c)

car $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$ et $(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

Exercice 7

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont deux angles orientés. Recopie et complète le tableau suivant :

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} + \hat{\beta}$				
Une mesure de $\hat{\propto} - \hat{\beta}$				

SOLUTION

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} + \hat{\beta}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{-43\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} - \hat{\beta}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-57\pi}{6}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est :

a) $\frac{2021\pi}{6}$.

b) $-\frac{37\pi}{3}$

SOLUTION

a) α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \frac{2021\pi}{6} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{2021\pi}{6} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{2021}{12} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{2027}{12} < k \leq -\frac{2015}{12}$; d'où : $k = -168$.

donc $\alpha = \frac{2021\pi}{6} - 168 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

b) $-\frac{37\pi}{3} = \frac{-36\pi-\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 6 \times 2\pi$; donc $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 9

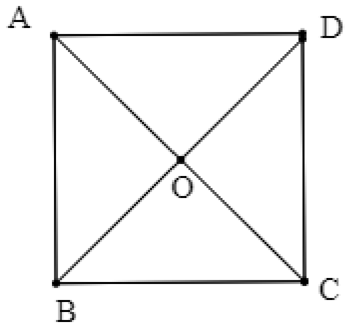
ABCD est un carré de centre O et de sens direct. Relie chaque élément du tableau A à un élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$

Tableau B

$\hat{\pi}$
$\hat{0}$
$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$



SOLUTION

Tableau A

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$

Tableau B

$\hat{\pi}$
$\hat{0}$
$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$

Exercice 10

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, trois vecteurs non nuls.
Sachant que $-\frac{\pi}{7}$ *et* $\frac{\pi}{4}$ *sont des mesures* respectives des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$, complète les phrases suivantes :

1) Une mesure de $(\widehat{2\vec{u},\vec{v}})$ est ....
2) Une mesure de $(\widehat{\vec{u},-3\vec{v}})$ est ....
3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})$ *est* ....

Une mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ *est* .... car $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ =................+ ....

SOLUTION

1) Une mesure de $(\widehat{2\vec{u},\vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7}$

2) Une mesure de $(\widehat{\vec{u},-3\vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7}+\pi=\frac{6\pi}{7}$

3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})$ est $-\frac{\pi}{4}$

4) Une mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ est $\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{4}$ car $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=(\widehat{\vec{v},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$

B) Exercices de renforcement

Exercice 11

1. Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2sina\ cosb=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

2. Soit A le nombre réel défini par : $A=2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11})$

a) Démontre que : $A=sin\frac{10\pi}{11}$

b) Déduis-en que : $A=sin\frac{\pi}{11}$

c) Démontre que : $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

SOLUTION

1. on a : $\sin(a+b)=sina\ cosb+cosa\ sinb$ et $\sin(a-b)=sina\ cosb-cosa\ sinb$

Donc : $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2sina\ cosb$

2. a) On a : $A=\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{3\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{5\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{7\pi}{11}\right)+\left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{9\pi}{11}\right)$

$$A=\left(sin\frac{2\pi}{11}+sin0\right)+\left(sin\frac{4\pi}{11}+sin\frac{-2\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{6\pi}{11}+sin\frac{-4\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{8\pi}{11}+sin\frac{-6\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{10\pi}{11}+sin\frac{-8\pi}{11}\right)$$

$$A=sin\frac{2\pi}{11}+\left(sin\frac{4\pi}{11}-sin\frac{2\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{6\pi}{11}-sin\frac{4\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{8\pi}{11}-sin\frac{6\pi}{11}\right)+\left(sin\frac{10\pi}{11}-sin\frac{8\pi}{11}\right)$$

D'où: $A=sin\frac{10\pi}{11}$

b) On a: $\frac{10\pi}{11}=\pi-\frac{\pi}{11}$; donc $A=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)=sin\frac{\pi}{11}$

c) On a : $A=2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11})$ et $A=sin\frac{\pi}{11}$

On en déduit que : $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ car $sin\frac{\pi}{11}\neq 0$

Exercice 12

1) Démontre pour tout nombre réel x, $cos2x-\sqrt{3}sin2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2) a) Résous dans ℝ l'équation (E) : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = -1$.

b) Représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Donne les solutions de (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

SOLUTION

1) Pour tout nombre réel x , on a : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}(\frac{1}{2}cos2x - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx)$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cos2x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)sin2x\right)$$

$$= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

2) a) $(E) \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

On a : $cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

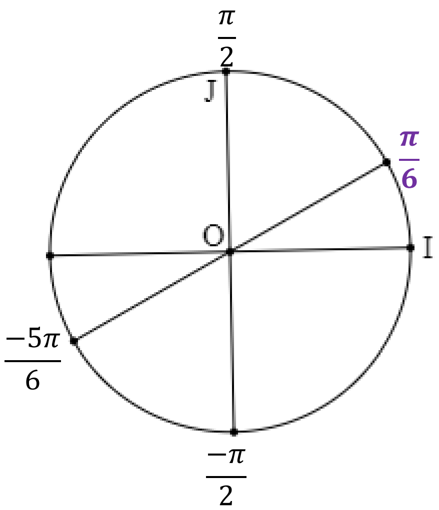
Donc : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)



c)

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{10}{6} < k \leq \frac{11}{6}$. Trois valeurs de k conviennent : -1; 0 et 1 .

  Il leur correspond les solutions : $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq \frac{5}{2}$. Trois valeurs de k conviennent : 0; 1 et 2 .

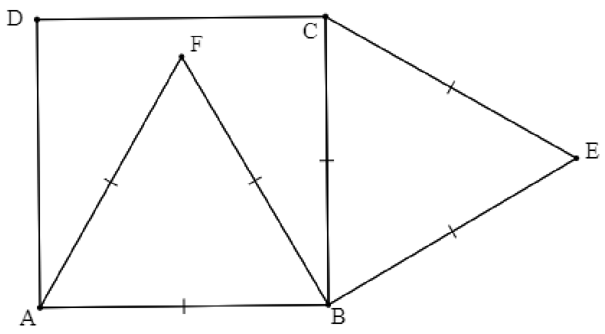
  Il leur correspond les solutions : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

  Les solutions de l'équation (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ sont : $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$

C) EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

ABCD est un carré de sens direct. ABF et CBE sont des triangles équilatéraux directs



1. Justifie que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}) = \frac{5\pi}{12}$

2. Démontre que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{12}$

3. a) Donne une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}})$.

   b) Déduis-en que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

4. Démontre que les points D, E et F sont alignés.

SOLUTION

1) Le triangle AFD est isocèle en A et de sens direct. On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}}) = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) = (\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}})$

on déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

2) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})$ (relation de Chasles)

Donc : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}}\right) + mes(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$. D'où $Mes(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{12}$

3) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$.

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

b) Le triangle CDE est isocèle en C et de sens direct.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) + (\widehat{EC,\overrightarrow{ED}}) = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = (\widehat{EC,\overrightarrow{ED}})$.

Donc : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$. On en déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

c) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{DC,\overrightarrow{DE}}\right) = \hat{0}$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = -\left(\widehat{DC,\overrightarrow{DE}}\right)$

Par suite, les points D; E et F sont alignés.