SECONDAIRE
T^{le} A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

LEÇON 5 : SUITES NUMÉRIQUES

Durée : 14 heures **Code :**

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le souci d'avoir assez de revenus pour l'organisation des festivités de fin d'année, le président de la promotion terminale veut effectuer le placement de la somme de 300.000 Francs CFA que la promotion a dans sa caisse au premier Janvier 2021.
Il se rend dans une structure bancaire et le banquier lui propose deux options.
Option 1 : le capital placé est augmenté de 2500 Francs CFA à intérêts simples par mois.
Option 2 : le capital placé augmentera de 5% de mois en mois pendant la durée du placement.
Le budget de la manifestation étant de 400.000 Francs CFA, le président voudrait connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir rapidement cette somme avant la date de la manifestation fixée au début du mois d'août 2022.
Le président veut savoir laquelle des deux options est plus avantageuse.
Les élèves de terminale A décident d'aider le président à faire le meilleur placement.

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. Suites arithmétiques.

1. Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsque son premier terme est donné et que chaque terme est la somme du terme qui le précède par une constante r appelée la raison.

Autrement dit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si u_0 étant donné il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque :
- Une suite arithmétique peut être définie à partir d'un rang $n_0 > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple
La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=125$ et pour tout entier naturel,
$u_{n+1} = u_n + 250$ est une suite arithmétique de raison 250 et de premier terme $u_0 = 125$.

Exercice de fixation
Soit (u_n) la suite définie par $u_3 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 7$, pour tout $n \geq 3$.
1) Calcule u_4 et u_5.
2) Justifie que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

Solution

1) Pour calculer u_4, on remplace *n* par 3, on obtient :$u_{3+1} = u_4 = u_3 + 7 = 2 + 7 = 9$.
Pour calculer u_5 on remplace *n* par 4, on obtient : $u_{4+1} = u_5 = u_4 + 7 = 9 + 7 = 16$.
2) On a :$u_{n+1} = u_n + 7$. D'après la définition, $(u_n)_{n\geq 3}$ est une suite arithmétique. Sa raison 7 et son premier terme est $u_3 = 2$.

2 Expression du terme général u_n en fonction de *n*

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
On a pour tout entier naturel n, $u_n = n\,r + u_0$.

En général : Pour toute suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$de raison r, pour tous entiers naturels *n* et p, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exercice de fixation

Soit la suite arithmétique$(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :$v_1 = 1350$ et v_{n+1} = v_n +200 pour $n \geq 1$.
Exprime $v_n$en fonction de n puis calcule v_{21}.

Solution

$(v_n)_{n\geq 1}$est la suite arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme 1350.
En appliquant la remarque précédente on a :
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n = v_1 + (n-1)r = 1350 + (n-1)200 = 1150 + 200n$

On a donc $v_{21} = 1150 + 200 \times 21 = 5350$.

3 Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété

• Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive
• Une suite arithmétique est décroissante si sa raison est négative
• Une suite arithmétique est constante si sa raison est nulle.

Exercice de fixation

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison *r*.
Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$dans chacun des cas suivants :
a) r = -2
b) r = 0
c) r = 10

Solution

a) Comme r = -2 et -2 < 0 alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$est décroissante.
b) Comme r = 0 alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$est constante.
c) Comme r = 10 et 10 > 0 alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$est croissante.

4. Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite arithmétique donnée.
-Pour tout nombre entier naturel *n*, on a : $u_0+u_1+\ldots+u_n = (n+1)(\frac{u_0+u_n}{2})$
-Pour tous entiers naturels *n* et *p* tels que $n \geq p$, on a :$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n = (n-p+1)(\frac{u_p+u_n}{2})$

Remarque :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

S= $(nombre\ de\ termes) \times \frac{premier\ terme + derner\ terme}{2}$ **.**

Exercice de fixation

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3 + u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Calcule la somme des 26 premiers termes de cette suite.

Solution

Le premier terme de cette suite arithmétique est $u_1 = -1$, sa raison $r = 3$.

Donc on a :

$u_{26} = u_1 + (26-1)r = -1 + 25 \times 3 = 74$.

$u_1 + u_2 + \cdots + u_{26} = (26 - 1 + 1) \times \frac{u_1 + u_{26}}{2} = 26 \times \frac{-1+74}{2} = 26 \times \frac{73}{2} = 949$.

II. SUITES GEOMETRIQUES.

1 Définition

Une suite numérique $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsque son premier terme est donné et que chaque terme est le produit du terme qui le précède par une constante q appelée la raison.

Autrement dit, une suite numérique $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite géométrique si v_0 étant donné, il existe un nombre réel q tel que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = qv_n$

Remarque :

- Une suite géométrique peut être définie à partir d'un rang n_0 >0

-Si $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q de termes non tous nuls alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

Exercice de fixation

On donne t_0=1000 000 et pour tout entier naturel n, t_{n+1} =0,9t_n

1) Calcule t_1 et t_2

2) Justifie que la suite (t_n)est une suite géométrique dont tu préciseras le premier terme et la raison

Solution

1) t_0=1000 000 on a :$t_1 = 0{,}9 \times\ t_0$=0,9×1000 000 donc t_1 =900000. De même on a :

t_2= 0,9×900 000 donc : $t_2 = 810\ 000$

2) La suite $(t_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$est par définition la suite géométrique de premier terme $t_0 = 1000000$ et de raison $r = 0{,}9$.

2 Expression du terme général d'une suite géométrique en fonction de *n*

Propriété

Si $(v_n)_{n \geq 0}$ est la suite géométrique de premier termev_0 et de raison un réel non nul q, alors pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n$

En général : Pour toute suite géométrique de raison q, on a:

Pour tous entiers naturels $n\ et\ p\ avec\ p \leq n;\ v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Exercice de fixation

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et tel que v_3=12 ;
Calcule v_7

Solution
Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, applique la formule générale ci-dessus. On a :$v_n = v_p \times q^{n-p}$.
Avec $n = 7; p = 3\ et\ q = \frac{1}{2}$, on obtient :
$v_7 = v_3 \times (\frac{1}{2})^{7-3} = 12 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

3 Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété
Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique à termes positifs et de raison q.
• Si 0 <q <1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$est décroissante.
• Si q >1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$est croissante.
• Si q = 1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$est constante.

Exercice de fixation
Etudie le sens de variation de la suite géométrique $(v_n)_{n\geq 0}$ de raison q dans chacun des cas suivants :
a)$v_0 = 0{,}5$ et $q = 7$
b)$v_0 = 21$ et $q = 0{,}6$
c) $v_0 = 0{,}5$ et $q = 1$

Solution
(v_n) est une suite géométrique et ;
a) $v_0 = 0{,}5$ et $q = 7$, comme le premier terme et la raison sont tous deux supérieurs à zéro et $q > 1$alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs et (v_n) est croissante.
b) $v_0 = 21$ et $q = 0{,}6$, comme le premier terme et la raison sont tous deux supérieurs à zéro et $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs et (v_n) est décroissante.
c) $v_0 = 0{,}5$ et q = 1, comme le premier terme et la raison sont tous deux supérieurs à zéro alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs.
On a q = 1 donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est constante.

Remarque
Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison un nombre réel négatif, alors $(v_n)_{n\geq 0}$ n'est ni croissante ni décroissante ni constante.

4 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q différente de 1.
-Pour tout nombre entier naturel *n*, on a : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
-Pour tous entiers naturels *n* et *p* tels que $n \geq p$, on a :
$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.
Remarque :

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1est égale à
S= $(premier\ terme) \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$.

Exercice de fixation

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de troisième terme $v_3 = 12$.

1) Vérifie que :$v_1 = 48$.

2) Détermine en fonction de n l'expression de la somme :$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Solution

1) On a :$v_3 = v_1 \times q^{3-1} = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = v_1 \times \frac{1}{4}$.

D'où $v_1 \times \frac{1}{4} = 12$ et $v_1 = 4 \times 12 = 48$.

2) $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 48 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 48 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 96\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

5. Tableau récapitulatif

Nature de la suite	Suite arithmétique	Suite géométrique
Caractérisation par une relation de récurrence	Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + r\ \ avec\ r \in \mathbb{R}$	Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = qu_n$ avec $q \in \mathbb{R}$
Raison	r	q
Caractérisation par une formule explicite	•$u_n = n\,r + u_0$ • Pour tous $n \in \mathbb{N}\ et\ p \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-p)r + u_p$	•$v_{n+1} = q^n v_0$ • Pour tous $n \in \mathbb{N}\ et\ p \in \mathbb{N}$, $v_n = v_p q^{n-p}$
Somme des termes consécutifs	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.	si $q \neq 1\ alors$ $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$	Si $q \neq 1\ alors$ $v_p + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ où n et p sont des entiers naturels tels que $n \geq p$

C- SITUATION COMPLEXE

Madame Koffi travaille dans une entreprise. Au début de sa carrière professionnelle, elle place un capital initial de 2 millions de francs CFA dans une banque, au taux de 10% d'intérêt composé annuel. Avec l'argent qu'elle aura capitalisé au bout de 25 ans, elle envisage construire plus tard une maison dont le coût s'élèvera à 20 millions francs CFA du fait de l'inflation du coût des matériaux de construction au fil des temps. Dame Koffi voudrait savoir si au bout de 25 ans, elle pourra construire cette maison avec son épargne. Elle informe sa nièce. Celle-ci te pose le problème.

À L'aide d'une production argumentée, dis si le souhait de Madame Koffi sera réalisé.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation de Madame Koffi, nous allons utiliser les suites géométriques.
- Détermination de l'expression explicite de la suite.
  Soit (u_n) l'ensemble des capitaux durant l'épargne.
  $u_n$le capital à la nième année.
  $u_0 = 2000000$ et $u_{n+1} = 1{,}1u_n$ donc (u_n) est la suite géométrique de raison 1,1 et de premier
  Terme 2 000 000 par suite, $u_n = 2000000(1{,}1)^n$pour tout entier n.

- Calcul du terme d'indice 25.

Au bout de 25 ans de travail, elle aura la somme u_{25}

$u_{25} = 2000000 \times (1{,}1)^{25} = 21669411{,}9$.

- Comparer le résultat précédent à 20000000 Francs CFA. Puis conclure.

$21\ 669\ 411{,}9 > 20\ 000\ 000$.
Conclusion : le souhait de Madame Koffi sera donc réalisé.

D- EXERCICES

Exercice d'application

Exercice 1 :

(u_n) est une suite de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1) Si $u_{n+1} = 2u_n + 3$ alors la suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
2) Si $u_{n+1} + u_n = r$, où r est une constante alors la suite (u_n) est une suite arithmétique.
3) Si $u_{n+1} \times u_n = q$, où q est une constante alors la suite (u_n) est une suite géométrique.
4) Si la suite (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout entier non nul n, $\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2} = u_n$.

Solution

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = 5n - 4$
1) Démontre que la suite (u_n) est une suite arithmétique.
2) Précise le premier terme et la raison de (u_n).
3) Précise le sens de variation de (u_n).
4) Calcule la somme des seize premiers termes de la suite (u_n).

Solution

1) On a :$u_{n+1} - u_n = 5(n + 1) - 4 - (5n - 4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$
Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique.
2) le premier terme est $u_0 = -4$ et la raison est $r = 5$.
3) (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 comme sa raison est positive alors la suite (u_n) est croissante.
4) $u_0 + u_1 + \cdots + u_{13} + u_{14} + u_{15} = 16 \times \left(\frac{u_0+u_{15}}{2}\right)$
On a $u_0 = -4$ et $u_{15} = 5 \times 15 - 4 = 75 - 4 = 71$

donc $u_0 + u_1 + \cdots + u_{13} + u_{14} + u_{15} = 16 \times \left(\frac{-4+71}{2}\right) = 16 \times \frac{67}{2} = 8 \times 67 = 536$

Exercice 3

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $V_n = 3^n$.

1) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique.
2) Précise le premier terme et la raison de (V_n).
3) Précise le sens de variation de (V_n).
4) Calcule la somme des seize premiers termes de la suite (V_n).

Solution

1) On a : $\frac{V_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$.

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique.

2) Le premier terme est $V_0 = 1$ et la raison est 3

3) (V_n) est une suite géométrique de raison 3 comme sa raison est supérieure à 1 alors V est croissante.

4) $V_0 + V_1 + \cdots + V_{13} + V_{14} + V_{15} = 1 \times \left(\frac{1-3^{16}}{1-3}\right) = \frac{3^{16}-1}{2} = \frac{43046720}{2} = 21523360$.

Exercices de renforcement

Exercice 4

Le premier janvier 2015, Monsieur Yao a été embauché dans une entreprise avec un salaire mensuel initial de 125 000f. Chaque année, à la date anniversaire de son embauche, son salaire mensuel connaît une augmentation de 12000f CFA. On note U_0, le premier salaire mensuel de Monsieur Yao et U_n son salaire mensuel au premier janvier de l'an 2015 + n.

1) Calcule U_1, U_2etU_3.
2) Calcule le salaire mensuel que percevra Monsieur Yao au premier janvier 2020.
3) Exprime U_{n+1} en fonction de U_n.
4) a). Justifie qu'au bout des cinq premières années de service, l'entreprise aura dépensé pour le compte de cet employé une somme totale correspondant à $12\ (U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$

b) Déduis-en la valeur numérique de cette somme.

Solution

1.$U_1 = U_0 + 12\ 000 = 125\ 000 + 12\ 000 = 137\ 000$

$$U_2 = U_1 + 12\ 000 = 137\ 000 + 12\ 000 = 149\ 000$$
$$U_3 = U_2 + 12\ 000 = 149\ 000 + 12\ 000 = 161\ 000$$

2) le salaire mensuel que percevra Monsieur Yao au premier janvier 2020 est U_5 tel que

$$U_5 = U_4 + 12\ 000 = U_3 + 12\ 000 + 12\ 000 = 173\ 000 + 12000 = 185\ 000$$

3) $U_{n+1} = U_n + 12\ 000$

4) a) Au bout d'une année l'entreprise dépense 12 fois le salaire mensuel de l'année.

Ainsi : la première année on a $12\ U_0$
la deuxième année on a $12\ U_1$
la troisième année on a $12\ U_2$
la quatrième année on a $12\ U_3$
la cinquième année on a $12\ U_4$

donc pour les cinq premières années de service, l'entreprise aura dépensé pour le compte de cet employé une somme totale correspondant à

$$12\ U_0 + 12\ U_1 + 12\ U_2 + 12\ U_3 + 12\ U_4 = 12\ (U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$$

b) (U_n) est une suite arithmétique de raison 12 000 et de premier terme 125 000 donc $U_n = U_0 + 12\ 000n$ d'où $U_n = 125\ 000 + 12\ 000n$

$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$est la somme des cinq premiers termes d'une suite arithmétique

Donc $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 5\left(\frac{U_0 + U_4}{2}\right) = 5\ \left(\frac{125\ 000 + 173\ 000}{2}\right) = \frac{5\times 298000}{2} = 745\ 000$

par suite $12\ (U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4) = 12\ \times 745\ 000 = 8\ 940\ 000$

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$, pour tout $n \geq 1$.

1) Calcule u_1 , u_2 , u_3.

2) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

4) Démontre que le terme général en fonction de n est $u_n = \frac{2}{3^n}$

5) On veut calculer le nombre réel $P_n = u_0 u_0 \dots \dots u_{n-1}$. Pour cela, on pose $w_n = \ln\ (u_n)$.

a) Démontre que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprime $le\ terme\ général\ \ w_n$ en fonction de n.

c) Déduis-en que $P_n\ = (\frac{4}{3^{n-1}})^{\frac{n}{2}}$.

Solution

Soit (u_n) la suite définie par$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$, pour tout $n \geq 1$.

1) $u_1 = \frac{1}{3}u_0 = \frac{2}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3}u_1 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; $u_3 = \frac{1}{3}u_2 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} = \frac{2}{27}$

2) on a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ donc par définition la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

la raison est $\frac{1}{3}$et le premier terme est 2.

3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, comme 0 $<\frac{1}{3}<$1, alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

4) Pour tout entier n, $u_n = u_0\, q^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^{\,n}}$ donc $u_n = \frac{2}{3^n}$

5) On a : $w_n = \ln\ (u_n)$

a) $w_{n+1} = \ln\ (u_{n+1})$

$$w_{n+1} - w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{3}u_n\right) - \ln(u_n)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln(u_n) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

donc la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = \ln(u_0) = ln2$

et la raison$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

b) (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = \ln(u_0) = ln2$

et la raison$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ donc $w_n = w_0 + nr = ln2 + n\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

c) On a $w_n = \ln\ (u_n)$ donc $u_n = e^{w_n}$.

On a $P_n = u_0 u_1 \dots \dots u_{n-1} = e^{w_0}e^{w_1} \dots \dots e^{w_{n-2}}e^{w_{n-1}}$.

$$= e^{w_0+w_1+\cdots+w_{n-1}} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_{n-1}} = e^{\frac{n}{2}(w_0+w_{n-1})} = e^{\frac{n}{2}\left(ln2+\ln\left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)}$$
$$= e^{\frac{n}{2}\left(\ln\left(4\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right)} = (\frac{4}{3^{n-1}})^{\frac{n}{2}}$$

Exercice d'approfondissement

Exercice 6

Le premier Janvier 2009, Monsieur Nahoua est embauché dans une entreprise avec un salaire mensuel de 92 000 francs.

L'entreprise lui laisse le choix entre deux plans de carrière :

Plan A : Son salaire mensuel augmentera de 5000 francs chaque année au premier janvier.

Plan B : Son salaire mensuel augmentera de 4,5% chaque année au premier janvier.

On note :

- $U_{n,}$ le salaire mensuel de l'employé selon le plan A au premier janvier $2009 + n$.
- $V_{n,}$ le salaire mensuel de l'employé selon le plan B au premier janvier $2009 + n$.

1. Calcule U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 , puis V_0 ; V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4

(On prendra les arrondis d'ordre 2 pour les termes de la suite V_n)

2.a) Exprime U_{n+1} en fonction de U_n

b) En déduire que la suite (U_n) est une suite arithmétique.

c) Justifie que pour tout entier naturel n, $U_n = 92000 + 5000n$.

3.a Démontre que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 1{,}05V_n$

b) Quelle est la nature de la suite (V_n) ?

c) Justifier que $V_n = 92000(1{,}045)^n$

4. Calcule U_{20}et V_{20}

5. on note $C_1 = 12(U_0 + U_1 + \cdots + U_{29})etC_2 = 12(V_0 + V_1 + \cdots + V_{29})$

On admet que C_1et C_2 sont les cumuls respectifs des salaires selon les plans A et B sur 30 années de service.

Calcule C_1et C_2.

Détermine le plan le plus avantageux si l'employé part à la retraite après 30 années de service.

Solution

1. Calculons U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 , puis V_0 ; V_1 ; V_2 ; V_3 ; V_4

(On prendra les arrondis d'ordre 2 pour les termes de la suite V_n)

- $U_{n,}$

$$U_0 = 92\,000$$
$$U_1 = U_0 + 5\,000 = 92\,000 + 5\,000 = 97\,000$$
$$U_2 = U_1 + 5\,000 = 97\,000 + 5\,000 = 102\,000$$
$$U_3 = U_2 + 5\,000 = 102\,000 + 5\,000 = 107\,000$$
$$U_4 = U_3 + 5\,000 = 107\,000 + 5\,000 = 112\,000$$

- $V_{n,}$

$$V_0 = 92\,000$$
$$V_1 = 0{,}045V_0 + V_0 = 1{,}045 \times V_0 = 1{,}045 \times 92\,000 = 100320$$
$$V_2 = 1{,}045V_1 = 1{,}045 \times 100\,320 = 104\,834{,}4$$
$$V_3 = 1{,}045V_2 = 1{,}045 \times 104\,834{,}4 = 109551{,}95$$
$$V_4 = 0{,}045V_3 = 1{,}045 \times 109551{,}95 = 111\,4481{,}79$$

2. a) On a $U_{n+1} = U_n + 5\,000$ donc (U_n) est une suite arithmétique.

b) (U_n) est la suite arithmétique de raison 5 000 et de premier terme 92 000.

donc $U_n = U_0 + 5\,000n$
c)Ainsi pour tout entier naturel n, $U_n = 92000 + 5000n$.

3.a) On a

$$V_1 = 0{,}045V_0 + V_0 = 1{,}045 \times V_0$$
$$V_2 = 1{,}045V_1$$
$$V_3 = 1{,}045V_2$$

donc pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 1{,}045\,V_n$
b) (V_n) est une suite géométrique
c)(V_n) est une suite géométrique de raison 1,045 et de premier terme 92 000
par suite $V_n = V_0(1{,}045)^n$

$$V_n = 92000(1{,}045)^n$$

4. $U_{20} = 92000 + 5000 \times 20 = 92\,000 + 100\,000 = 192\,000$

$$V_{20} = 92000(1{,}045)^{20} = 221\,877{,}69$$

5. on note $C_1 = 12(U_0 + U_1 + \cdots + U_{29})etC_2 = 12(V_0 + V_1 + \cdots + V_{29})$
On admet que C_1et C_2 sont les cumuls respectifs des salaires selon les plans A et B sur 30 années de service.

$C_1 = 12(U_0 + U_1 + \cdots + U_{29}) = 12 \times 30\left(\frac{U_0+U_{29}}{2}\right)$
$C_1 = 36 \times \left(\frac{92\,000+290\,000}{2}\right) = 36 \times 191000 = 6\,876\,000.$
$C_2 = 12(V_0 + V_1 + \cdots + V_{29}) = 12V_0\left(\frac{1-(1{,}045)^{30}}{1-1{,}045}\right),$
$C_2 = 12 \times 92000 \times \left(\frac{(1{,}045)^{30}-1}{0{,}045}\right) = 67351804{,}9.$

Le plan A est le plus avantageux si l'employé part à la retraite après 30 années de service.