CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

LEÇON 7 : SYSTEMES LINEAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

THEME : CALCULS ALGÀBRIQUES

Durée : 10 heures **Code :**

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour réaliser un cocktail, on achète des bouteilles d'un litre d'orange à 800F le litre et des bouteilles d'un litre de jus de pomme à 600 F le litre. À l'occasion de l'anniversaire de leur professeur principal, des élèves de Terminale A commandent du jus. Ils veulent au moins 20 bouteilles de mélange et ne veulent dépenser que 24000 F CFA.
Le fabriquant du jus ne sachant pas si le budget prévu peut suffire pour les 20 bouteilles, te sollicite.
Tes camarades de classe et toi, décident de déterminer le nombre de bouteilles possible de chaque type de jus.

B- CONTENU DE LA LEÇON

1. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a- Méthode de substitution.

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équation $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 3 + 2y + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2y \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \times (-2) = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-1; -2)\}$

b- Méthode de combinaison.

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$

Je multiplie la première équation par (-1) et j'ajoute à la deuxième équation pour déterminer y

$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ x + y = -3 \end{cases}$ ***on obtient*** $\mathbf{3y = -6}$ **d'où** $\mathbf{y = -2}$ **en remplaçant** $\boldsymbol{y}$ **par sa valeur dans la deuxième équation, on a :** $\mathbf{x = -1}$.

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-1; -2)\}$.

2. Résolution d'un système de type (S): $\begin{cases} a\ln x + b\ln y = c \\ a'\ln x + b'\ln y = c' \end{cases}$ ou (S): $\begin{cases} ae^x + be^y = c \\ a'e^x + b'e^y = c' \end{cases}$

Méthode

Ces systèmes d'équations sont résolus par changement de variables.

Exemples

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, chacun des systèmes d'équations suivants :

(S_1) : $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = -2 \\ 4\ln x + \ln y = 5 \end{cases}$

(S_2) : $\begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$

Solution

• $(\mathbf{S_1})$: $\begin{cases} \mathbf{2\ln x - \ln y = -2} \\ \mathbf{4\ln x + \ln y = 5} \end{cases}$

Contraintes sur x et y : $x > 0$ et $y > 0$.

Je pose : $lnx = X$ et $lny = Y$. On obtient par ce changement le système : $\begin{cases} 2X - Y = -2 & \text{(i)} \\ 4X + Y = 5 & \text{(ii)} \end{cases}$

Je résous ce système par la méthode de substitution.

- J'extrait Y dans l'équation (i).

On a : $Y = 2X + 2$ (iii).

- Je remplace dans l'équation (ii), Y par $2X + 2$.

On obtient: $4X + 2X + 2 = 5$

C'est-à-dire $6X = 3$

Par suite $X = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- Je détermine Y en remplaçant X par $\frac{1}{2}$ dans l'égalité (iii) $Y = 2X + 2$.

On obtient: $Y = 2(\frac{1}{2}) + 2$.

C'est-à-dire $Y = 1 + 2 = 3$.

- On obtient : $lnx = X = \frac{1}{2}$ et $lny = Y = 3$.

$e^{lnx} = e^{\frac{1}{2}}$ et $e^{lny} = e^3$.

D'où : $x = e^{\frac{1}{2}}$ et $y = e^3$.

Le couple solution de (S_1) est le couple $(e^{\frac{1}{2}} ; e^3)$.

• $(\mathbf{S_2})$: $\begin{cases} \boldsymbol{e^x + 3e^y = 5} \\ \boldsymbol{2e^x - e^y = 3} \end{cases}$

Je pose : $e^x = X$ (X>0) et $e^y = Y$ $(Y > 0)$.

On obtient par ce changement le système : $\begin{cases} X + 3Y = 5 & \text{(i)} \\ 2X - Y = 3 & \text{(ii)} \end{cases}$

Je résous ce système par la méthode de combinaison.

- Je multiplie chaque membre de la première équation par (-2).

On obtient le système : $\begin{cases} -2X - 6Y = -10 \\ \quad 2X - Y = 3 \end{cases}$

En additionnant membre à membre, on obtient : $-7Y = -7$. Par suite $Y = 1$ et 1>0.

-Je multiplie maintenant chaque membre de la deuxième équation par 3.

On obtient le système : $\begin{cases} \quad X + 3Y = 5 \\ 6X - 3Y = 9 \end{cases}$

En additionnant membre à membre, on obtient : $7X = 14$. Par suite $X = 2$ et 2>0.

On obtient : $e^x = X = 2$ et $e^y = Y = 1$.

C'est-à-dire : $lne^x = ln2$ et $\ln(e^y) = \ln(1)$.

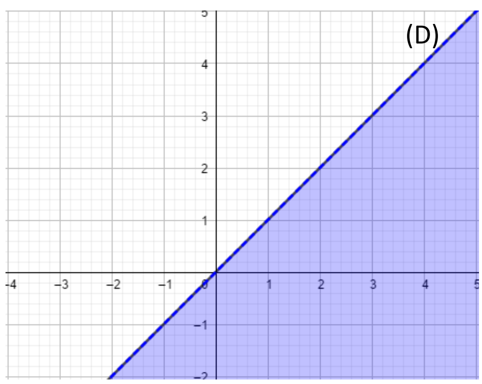
D'où : $x = ln2$ et $y = ln1 = 0$.

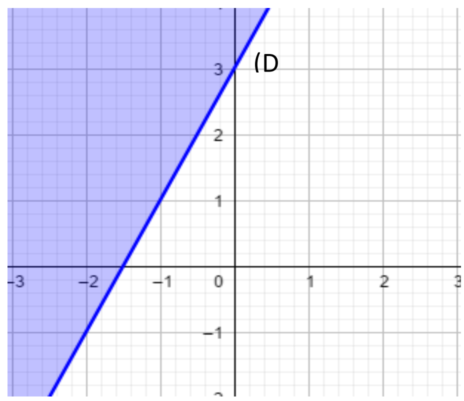
Le couple solution de (S_2) est le couple $(ln2 ; 0)$.

3- Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a. Inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du type $(\boldsymbol{I})$: $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$ ou $(\boldsymbol{I})$: $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$

Méthode de résolution
Elle est graphique.
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Je considère l'inéquation (I) : $ax + by + c > 0$.
Soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
On construit la droite (D) dans le repère.
La droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts (c'est-à-dire qui ne contiennent pas (D)) :





• l'un dont les coordonnées des points $M(x; y)$ vérifient l'inéquation : $ax + by + c > 0$.
• l'autre dont les coordonnées des points $M(x; y)$ vérifient l'inéquation : $ax + by + c < 0$.
La droite (D) est appelée la frontière de ces deux demi-plans.
On considère $A(x_A; y_A)$ un point n'appartenant pas à (D).
• Si $ax_A + by_A + c > 0$, alors l'ensemble des solutions de (I) est le demi-plan ouvert de frontière (D) contenant le point A.
• Si $ax_A + by_A + c < 0$, alors l'ensemble des solutions de (I) est le demi-plan ouvert de frontière (D) ne contenant pas le point A.

Remarque

Si on a une inéquation (I) *du type* : $ax + by + c \geq 0$, alors l'ensemble des solutions de (I) est l'ensemble des coordonnées des points d' un demi-plan fermé (c'est-à-dire qui contient la droite (D)).

Exercice de fixation

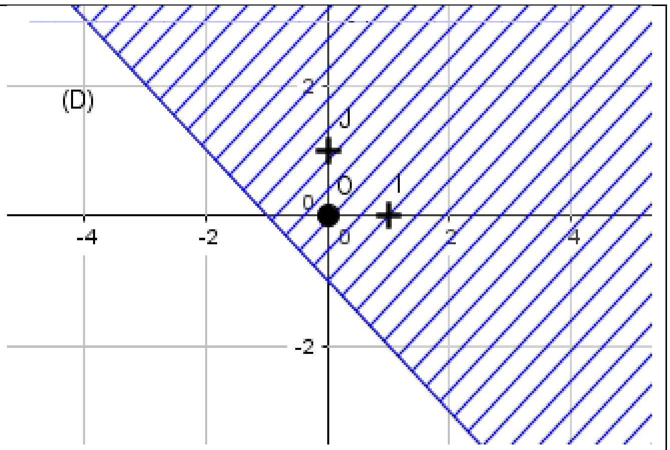
Le plan est muni d'un repère (0, I, J).
Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'inéquation : $(I) : x + y + 1 > 0$.

Solution

Soit (D) la droite d'équation : $x + y + 1 = 0$.
On trace la droite (D) dans le plan muni d'un repère.$(O; I; J)$

Considérons l'origine O(0 ; 0) du repère.
$x + y + 1 > 0$
On a : $0 + 0 + 1 = 1$ et 1>0.
Donc le couple (0 ; 0) est solution de l'inéquation (I).
Par suite l'ensemble des solutions de (I) est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan ouvert de frontière (D) contenant le point O.

Remarque
Les solutions sont les coordonnées des points de la partie coloriée en bleu sur le graphique, la droite (D) n'en fait pas partie.



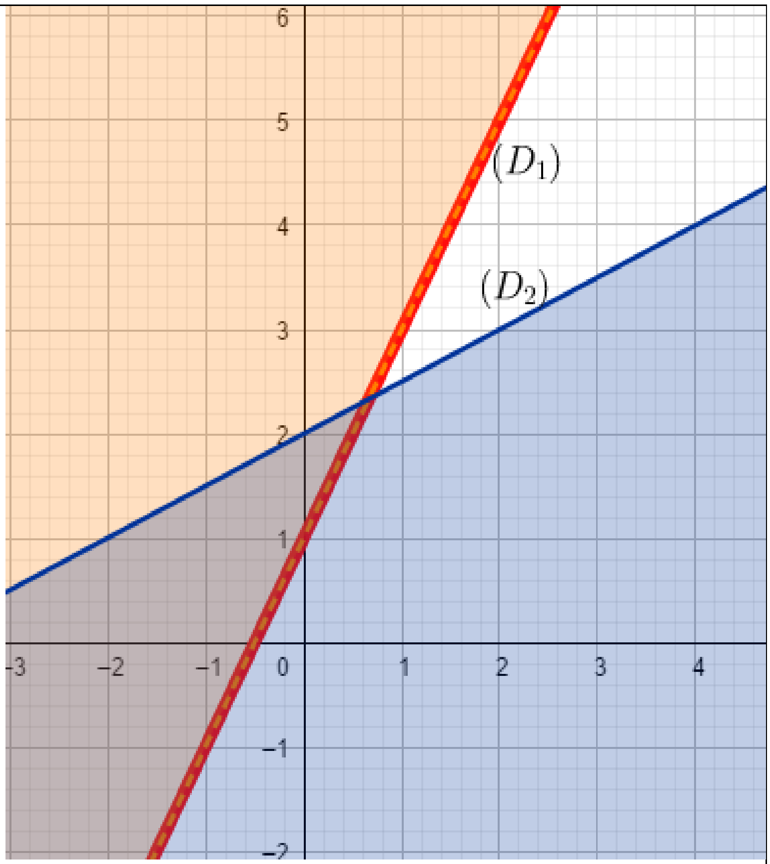
b. Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit le système (S): $\begin{cases} ax + by + c \geq 0 \\ a'x + b'y + c' < 0 \end{cases}$.

Méthode de résolution.
Elle est graphique.
Le plan est muni d'un repère (0, I, J).
Je désigne par :
(S_1) l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I_1) : ax + by + c \geq 0$.
(S_2) l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I_2) : a'x + b'y + c' < 0$.
L'ensemble des solutions du système (S) est l'intersection de (S_1) et (S_2).

Exercice de fixation
Le plan est muni d'un repère (0, I, J).
Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système (S): $\begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$

Solution

Soit l'inéquation $(I_1) : 2x - y + 1 < 0$ et (D_1) la droite d'équation : $2x - y + 1 = 0$. Je trace (D_1). Je vérifie si les coordonnées de l'origine O du repère sont solution de l'inéquation (I_1). On a : $2 \times 0 - 0 + 1 = 1$ *et* $1 > 0$. L'ensemble des solutions (H_1) de (I_1) est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan ouvert de frontière (D_1) ne contenant pas le point O. Soit l'inéquation $(I_2) : x - 2y + 4 \geq 0$ et(D_2) la droite d'équation : $x - 2y + 4 = 0$. Je trace (D_2). Je vérifie si les coordonnées de l'origine O du repère sont solution de l'inéquation (I_2). On a : $0 - 2 \times 0 + 4 = 4$ *et* $4 > 0$. L'ensemble des solutions (H_2) de (I_2) est l'ensemble des coordonnées des points du demi-plan fermé de frontière (D_2) contenant le point O. (partie en bleu, en dessous de D2) L'ensemble des solutions (H) du système (S) est l'intersection de (H_1) et (H_2).	

C. Situation complexe

Exercice

En vue d'égailler les festivités de fin d'année, les élèves de la Terminale A d'un lycée ont organisé un concours de jeu d'awalé.

Willy et Kévin, deux élèves de la classe, s'affrontent.

Willy est plus expérimenté que Kévin.

• Lorsque Willy gagne une partie, on lui donne 5 points et 0 point pour Kévin.

• Lorsque Kévin gagne une partie, on lui donne 8 points et 0 point pour Willy.

Les deux amis livrent 26 matchs, sans match nul, puis arrêtent le jeu avec le même nombre de points.

Surpris par cette égalité de points entre les deux adversaires, les organisateurs du jeu souhaitent connaître le nombre de parties gagnées par chacun des joueurs.

Avec tes connaissances mathématiques aide-les à déterminer le nombre de parties gagnées par Willy et par Kévin.

<u>Solution</u>

- Pour trouver le nombre de parties gagnées par chaque joueur je vais utiliser les systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Je modélise le problème :
  Soit x le nombre de jeu gagné par Willy et y le nombre de jeu gagné par Kévin.

x *et* y sont des entiers naturels non nuls et $\begin{cases} x + y = 26 \\ 5x = 8y \end{cases}$

- Je résous le système d'équations $\begin{cases} x + y = 26 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x + y = 26 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$ équivaut à: $\begin{cases} -5x - 5y = -130 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -5x - 5y = -130 & (1) \\ 5x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (2) j'obtiens: $-13\,y = -130$
Ce qui équivaut à: $\underline{y = 10}$.
En remplaçant y par 10 dans l'équation $x + y = 26$, j'obtiens $x + 10 = 26$.
C'est-à-dire que: $\underline{x = 16}$.

- **Conclusion**: Willy a gagné 16 parties et Kevin en a gagné 10.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application.

Exercice 1 :

Pour chacune des affirmations suivantes réponds par vrai ou faux selon qu'elle vraie ou fausse.

1) $(2; 0)$ est une solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de l'inéquation $x - 3y \leq 1$.
2) L'équation $2x + 3y - 4 = 0$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3) Le système $\begin{cases} e^x + e^y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
4) $(1; 2)$ est une solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 3 \\ 2\ln(x) - \ln(y) = 0 \end{cases}$.

Solution :
1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Faux.

Exercice 2 :

Dans le tableau ci-dessous, pour chacune des affirmations une seule des réponses A, B, C est exacte.
Copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

AFFIRMATIONS	REPONSES		
	A	B	C
1) La solution de $\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln(x) + \ln(y) = 0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est	$(1; 1)$	$(3; -1)$	$(e; e^{-1})$
2) La solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 3 \\ 2\ln(x) - \ln(y) = 0 \end{cases}$ est	$(1; 2)$	$(e; e^2)$	$(e^2; e)$
3) la solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ 2e^x - e^y = 0 \end{cases}$ est	$(\ln(2)\,; 0)$	$(1; 2)$	$(0; \ln(2))$
4) Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,l'inéquation $x + y - 2 > 0$ admet	0 solution	Une infinité de solution	1 solution

Solution :
1) A ; 2) B ; 3) C ; 4) B.

2. Exercices de renforcement

Exercice

On veut résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système d'équations (S): $\begin{cases} -x+y=1 & (1) \\ e^x+e^y=1 & (2) \end{cases}$

1) En utilisant (1) et(2) , Justifie que : $\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(1+\mathrm{e})=1$.
2) a. Déduis de la question 1. que : $x=-ln(1+e)$.
   b) Déduis-en la valeur de y.
3) Donne le couple solution de (S_2).

Solution

(S): $\begin{cases} -x+y=1 & (1) \\ e^x+e^y=1 & (2) \end{cases}$

1. En utilisant (1) et(2) , je justifie que : $e^x(1+e)=1$
Dans l'équation (1) je tire que $y=x+1$.
En remplaçant y par $x+1$ dans l'équation (2), j'obtiens: $e^x+e^{x+1}=1$. Ce qui équivaut à: $e^x+e.e^x=1$. C'est-à-dire: $e^x(1+e)=1$.
2. a) Je déduis de la question 1 que: $x=-ln(1+e)$.
On a: $e^x(1+e)=1$.
Ce qui équivaut à: $ln[e^x(1+e)]=ln1$. C'est-à-dire : $\ln(e^x)+ln(1+e)=0$.
Donc on a: $x=-ln(1+e)$.
   b) On a vue que $y=x+1$ et $x=-ln(1+e)$. Donc $y=1-ln(1+e)$.
3) Je donne le couple solution du système (S).

La solution du système (S) est le couple $(-ln(1+e); 1-ln(1+e))$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 1

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système d'équations (S): $\begin{cases} \ln x^2+3\ln y^2=4 \\ \ln x^2-\ln y^2=4 \end{cases}$

Solution

(S): $\begin{cases} lnx^2+3lny^2=4 \\ lnx^2-lny^2=4 \end{cases}$

Contraintes sur x et y : $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Je pose : $lnx^2=X$ et $lny^2=Y$. On obtient par ce changement le système : $\begin{cases} \mathrm{X}+3\mathrm{Y}=4 & \text{(i)} \\ \mathrm{X}-\mathrm{Y}=4 & \text{(ii)} \end{cases}$

Je résous ce système par la méthode de substitution.
- J'extrais Y dans l'équation (ii).
On a : $Y=X-4$ (iii).
- Je remplace dans l'équation (i), Y par $X-4$.
On obtient: $X+3X-12=4$
C'est-à-dire $4X=16$
Par suite $X=\frac{16}{4}=4$.

- Je détermine Y en remplaçant X par 4 dans l'égalité (iii) $Y=X-4$.
On obtient: $Y=4-4$.
C'est-à-dire $Y=0$.
- On obtient : $lnx^2=X=4$ et $lny^2=Y=0$.
$e^{lnx^2}=e^4$ et $e^{lny^2}=e^0$.
D'où : $x^2=(e^2)^2$ et $y^2=1$.

$x = \sqrt{(e^2)^2}$ ou $x = -\sqrt{(e^2)^2}$ et $y = 1$ ou $y = -1$
$x = e^2$ou $x = -e^2$ et y= 1 ou $y - 1$
Les couples solution de (S_1) sont: $(e^2\ ;\ 1), (e^2\ ;\ -1), (-e^2\ ;\ 1)\ et\ (-e^2\ ;\ -1)$.

Exercice 2
Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
Pour réaliser un cocktail, on achète x bouteilles d'un litre d'orange à 800F le litre et y bouteilles d'un litre de jus de pomme à 600 F le litre.
On veut obtenir au moins 8 litres de mélange, mais on ne veut pas dépenser plus de 8000 F.
1) Justifie que les contraintes de ce problème conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$$

2) Résous graphiquement ce système (on donnera tous les couples solution à coordonnées entières situées dans le domaine des possibilités).

<u>Solution</u>

1. Je Justifie que les contraintes de ce problème conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$$

- x et y sont des quantités. Donc on a: $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

- Le nombre total de litres de mélange est: $x + y$.

On veut obtenir au moins 8 litres de mélange. Donc on a:: $x + y \geq 8$

- Le prix de x bouteilles d'un litre d'orange est: $800x$.

Le prix de y bouteilles d'un litre d jus de pomme est: $600y$.

Le coût total de x bouteilles d'un litre d'orange et de y bouteilles d'un litre d jus de pomme est:

$$800x + 600y$$

On ne veut pas dépenser plus de 8000 F. Donc on a: $800x + 600y \leq 8000$. Ce qui équivaut à:

$$8x + 6y \leq 80$$

Conclusion: les contraintes de ce problème conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 8x + 6y \leq 80 \end{cases}$$

2. Je résous graphiquement ce système (on donnera tous les couples solution à coordonnées entières situées dans le domaine des possibilités).

Soit $(I_1) : x \geq 0$ et (OJ)la droite d'équation $x = 0$.
L'ensemble des solutions (H_1) de (I_1) est le demi-plan fermé de frontière (OJ) ne contenant pas le point $I(1; 0)$.

Soit $(I_2) : y \geq 0$ et (OI)la droite d'équation $y = 0$.
L'ensemble des solutions (H_2) de (I_2) est le demi-plan fermé de frontière (OI) ne contenant pas le point $J(0; 1)$.

Soit l'inéquation $(I_3) : x + y \geq 8$ et(D_3) la droite d'équation :
$x + y - 8 = 0$.
Je trace (D3).
Je vérifie si les coordonnées de l'origine O du repère sont solution de l'inéquation (I_3).
On a : $0 + 0 - 8 = -8 \; et \; -8 < 0$.
L'ensemble des solutions (H_3) de (I_3) est le demi-plan fermé de frontière (D_3) ne contenant pas le point O.

Soit l'inéquation (I_4) : $8x + 6y \leq 80$ et(D_2) la droite d'équation :
$8x + 6y - 80 = 0$.
Je trace (D$_4$).
Je vérifie si les coordonnées de l'origine O du repère sont solution de l'inéquation (I_4).
On a :

$$8 \times 0 + 6 \times 0 - 80 = -80 \; et \; -80 < 0.$$

L'ensemble des solutions (H_4) de (I_4) est le demi-plan fermé de frontière (D_4) contenant le point O.

L'ensemble des solutions (H) du système (S) est l'intersection de (H_1), (H_2), (H_3)et (H_4).
L'ensemble des solutions (H) est délimité par les droites (OI), (OJ), $(D_3) \; et (D_4)$.

Les couples solutions à coordonnées entières situées dans le domaine des possibilités sont:
$(0; 8), (0; 9), (0; 10), (0; 11), (0; 12), (1; 7), (1; 8), (1; 9)$
$(1; 10), (1; 11), (1; 12), (2; 6), (2; 7), (2; 8), (2; 9), (2; 10)$
$(3; 5), (3; 6), (3; 7), (3; 8), (4; 4), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (4; 7)$
$(4; 8), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (7; 1)$
$(7; 2), (7; 3), (7; 4), (8; 0), (8; 1), (9; 0), (9; 1), (10; 0)$