MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
Tle A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

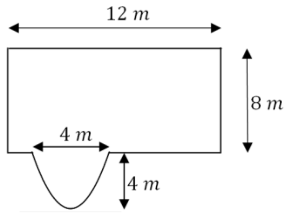
THEME : fonctions numériques

LEÇON 8 : PRIMTIVES ET CALCUL INTEGRAL

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le ministère a entrepris la construction d'une piscine dans l'enceinte d'un lycée d'excellence. L'entreprise chargée de l'ouvrage a affiché une image accompagnée d'un schéma de ce que sera cette piscine (voir image ci-contre).

Rimon élève de TA1 et amateur de natation, veut comparer la taille de la piscine de son lycée à celle du lycée professionnel de la ville. Il tente de calculer son aire mais n'y arrive pas. Il pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer l'aire totale de la piscine en construction.



B- RESUME DE COURS

I- NOTION DE PRIMITIVES

1) Primitives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle ***primitive*** de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F sur I. On a : **pour tout** $\boldsymbol{x} \in$ **I**, $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Remarque :

Si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive de f sur I est de la forme $x \longmapsto F(x) + c$ où c est un élément de $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$. On donne les fonctions F, G, H et P dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$; $P(x) = x^2 + 5x + x^3$.

Parmi les fonctions F, G, H et P cite celles qui sont des primitives de f.

Solution :

$F'(x) = 2x$; $G'(x) = 2x + 5$; $H'(x) = 2x + 5$ et $P'(x) = 2x + 5 + 3x^2$

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ et $H'(x) = f(x)$.

Donc G et F sont des primitives de f.

2) La primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un nombre donné

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel .

Il existe une primitive de f et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exercice de fixation

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par $G(x) = x^2 - x$.

Détermine la primitive H de g qui prend la valeur 5 en -1

Solution :

Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $H: x \longmapsto G(x) + c$

$H(x) = x^2 - x + c$. Comme $H(-1) = 5$, on a :$2 + c = 5$. Donc $c = 3$.

D'où $H(x) = x^2 - x + 3$.

3) Les primitives des fonctions de usuelles

Fonctions f	Primitives de f $(c \in \mathbb{R})$	Sur l'intervalle
$x \longmapsto a$; $(a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$; $(n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$; $(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$x \longmapsto \dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \longmapsto x^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0; +\infty[$ si $r > 0$ $]0; +\infty[$ si $r < 0$

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f

a) $f(x) = x^2$; $b)$ $f(x) = \frac{1}{x^5}$; $c)$ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; d)$f(x) = -3$.

Solution :

$a)F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$; $b)F(x) = -\frac{1}{4x^4} + c$; $c)F(x) = -3x^{-\frac{1}{3}} + c$; d) $F(x) = -3x + c$

6) primitives et opérations sur les fonctions

a) primitives de $u + v$

Propriété

Si U et V sont des primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle K, alors la fonction $(U + V)$ est une primitive sur K de la fonction $(u + v)$.

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \longmapsto x^4 + x^3$.

Solution
f est la somme des fonctions $x \longmapsto x^4$ et $x \longmapsto x^3$
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto x^4$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{5}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto x^3$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^4}{4}$. On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}$.

b) Primitives de $\boldsymbol{au}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$

Propriété
Si U est une primitive de la fonction u sur un intervalle K, alors pour tout nombre réel a, la fonction (aU) est une primitive sur K de la fonction (au).

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $f: x \longmapsto -\frac{5}{2x^2}$.

Solution
f est le produit de $-\frac{5}{2}$ par la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$
Une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \longmapsto \frac{-1}{x}$.
On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{5}{2x}$.

c) Primitives de $\boldsymbol{u' \times u^m}$, $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{\boldsymbol{-1}\})$

Propriété
$\boldsymbol{m}$ étant un nombre rationnel différent de -1,
Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors une primitive sur K de la fonction $u'u^m$ est la fonction $\frac{u^{m+1}}{m+1}$.

Exercice de fixation
Détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \longmapsto 2x(x^2+1)^8$.

Solution
La dérivée de la fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ est la fonction $x \longmapsto 2x$
Donc la fonction f est de la forme $x \longmapsto u'(x)(u(x))^8$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $x \longmapsto \frac{(x^2+1)^9}{9}$.

5) Les primitives des fonctions du type : $\boldsymbol{x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}}$

<u>Propriété</u>
u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas.
La fonction $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive $x \longmapsto \ln(u(x))$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement positive et $x \longmapsto \ln(-u(x))$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement négative.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur K de la fonction f définie ci-dessous :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; $K =]0\,;+\infty[$;

2) $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$; $K =]3\,;+\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+5}$; $K = \mathbb{R}$

Solution :

1) La fonction $u: x \longmapsto x$ est dérivable et positive sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in]0\,;+\infty[$, $u'(x) = 1$;

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est une fonction du type $x \longmapsto \ln x + c$ $(c \in \mathbb{R})$

2) La fonction $u: x \longmapsto 3 - x$ est dérivable et négative sur $]3\,;+\infty[$ et pour $x \in]3\,;+\infty[$, $u'(x) = -1$;

Pour $x \in]3\,;+\infty[$, $f(x) = -\frac{5\,u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $]3\,;+\infty[$ est une fonction du type $x \longmapsto -5\ln(-3+x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$

3) La fonction $u: x \longmapsto x^2 + 3x + 5$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 3$;

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto \ln(x^2+3x+5) + c$ $(c \in \mathbb{R})$

6) Les primitives des fonctions de chacun des types : $\boldsymbol{x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}}$.

Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est une primitive sur K de la fonction $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur K de la fonction f définie ci-dessous :

1) $f(x) = e^x$, $K = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$, $K = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 4e^{4x+5}$, $K = \mathbb{R}$

Solution

1) La fonction $u: x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 1$;

Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto e^x + c$ $(x \in \mathbb{R})$

2) La fonction $u: x \longmapsto x^2 + 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x + 3$;

Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type $x \longmapsto e^{x^2+3x-1} + c$ $(x \in \mathbb{R})$

3) La fonction $u : x \longmapsto 4x + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 4$;
Pour $x \in \mathbb{R}, f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction du type
$x \longmapsto e^{4x+5} + c \ (x \in \mathbb{R})$

II. Intégrale

1) Définition et notation

Définition

Soit f une fonction **continue sur un intervalle K**, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K.
Le nombre réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas de F. Il est appelé **intégrale de a à b de f.**

Notation :

On note :

• $\int_a^b f(x)dx$ **et on lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ »**

ou

• $[F(x)]_a^b$ et on lit : " $F(x)$ pris entre a et b".

Donc, on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exercice :

Calcule les intégrales suivantes: $\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{x}^2 \mathrm{dx}$; $\mathrm{P} = \int_0^1 \mathrm{z}^2 \mathrm{dz}$; $\mathrm{J} = \int_3^1 (1 - \frac{1}{\mathrm{t}}) \mathrm{dt}$

Solution :

• Considérons la fonction f continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = x^2$.
Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
Donc $I = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \times 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$.

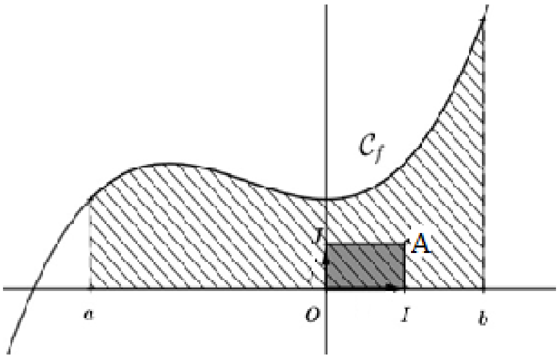
• $\mathrm{P} = \mathrm{I} = \frac{1}{3}$ car la variable z est muette

• Considérons la fonction f continue sur $[1; 3]$ et définie par $f(\mathrm{t}) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right)$
Une primitive de f est la fonction F définie par $\mathrm{F}(\mathrm{t}) = \mathrm{t} - \ln \mathrm{t}$.
Donc : $\mathrm{J} = \int_3^1 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) \mathrm{dt}$
$= [\mathrm{t} - \ln \mathrm{t}]_3^1$
$= (1 - \ln 1) - (3 - \ln 3)$
$= 1 - 3 + \ln 3$
$\mathrm{J} = -2 + \ln 3$

2) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Propriété

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
$\int_a^b \mathrm{f(x)dx}$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ et $\mathrm{x} = \mathrm{b}$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIAJ :1u. a = OI×OJ

On a : $\mathcal{A} = \int_{a}^{b} f(x)dx$ u. a

Exercice de fixation :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2x + 1$. f est continue et positive sur [0 ; +∞[

1) Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

Solution

1) L'unité d'aire en cm² est 2×3 cm².

$\mathcal{A}$ = ($\int_{0}^{5}(2x+1)dx$)×6 cm².

= $6 \times [x^2 + x]_0^5$ cm².

= 6 (25 + 5) cm².

= 180 cm²

3) Calcul d'aire

a) Aire du plan limité par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f une fonction continue positive sur $[a; b]$, (C_f) sa courbe représentative.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On a $\mathcal{A} = \int_{a}^{b} f(x)dx \,.ua$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par : f (x) = x^2. f est continue et positive sur ℝ

Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 3.

Solution

$\mathcal{A} = \int_1^3 (x^2)dx \ \ en\ (u.a)$

L'unité d'aire en cm² est 2×4 cm², donc $\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 (x^2)dx$)×8 cm²

$\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 x^2 dx$)×8 cm²

= $8 \times [\frac{1}{3}x^3]_1^3$ cm²

= $8\ (9 - \frac{1}{3})$ cm²

$\mathcal{A} = \frac{208}{3}$ cm²

b) Aire du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tel que : $f \geq g$ sur $[a; b]$; (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations :

$x = a\ \ et\ \ x = b.$

On a: $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right) ua.$

Exercice de fixation

Soit les fonctions f et g définies par : f$(x) = x + 2\ \ et\ \ g(x) = x^2$

On désigne par (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de $f\ et\ g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique: $2cm$

Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations : $x = -1\ \ et\ \ x = 2$

Solution

Etudions le signe de $g(x) - f(x)$.

$g(x) - f(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc pour tout $x \in [-1; 2]$, $g(x) - f(x) < 0$.

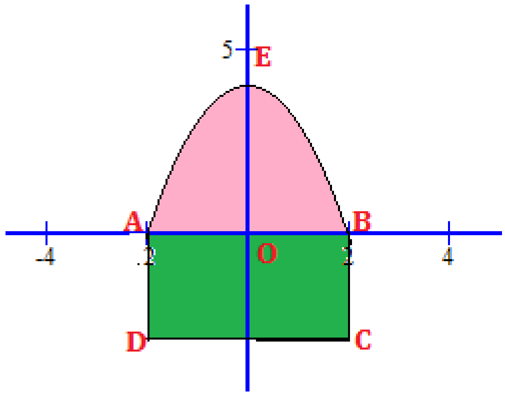
L'aire de la partie du plan délimitée par $(C_f), (C_g)$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est $\int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx \times 4\ cm^2$.

Or $\int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$.

L'aire cherchée est : $\mathcal{A} = \frac{9}{2} \times 4\ cm^2 = 18\ cm^2$.

C-SITUATION COMPLEXE

Un de vos camarades de classe rend visite à l'ancien professeur de mathématiques de son père à la retraite. Il remarque les formes géométriques particulières de la terrasse de celui-ci (voir figure ci-contre) : la partie en vert est délimitée par un rectangle de largeur 2 m et de longueur 4m et la partie en rose est délimitée par une parabole et par un segment [AB]. Amusé par le regard de votre camarade, l'ancien professeur de mathématique le met au défi et lui demande de calculer l'aire totale de la terrasse en vue de lui donner une idée du coût des travaux de revêtement de cette terrasse.



Il lui présente le plan de la terrasse en précisant que pendant la construction, il a veillé à ce que la parabole qui apparait dans le plan ait pour équation $y = -x^2+4$ dans le repère orthonormé d'origine O et d'unité 1m, avec A (-2,0) et B(2,0).
Aide ce camarade a relevé ce défi.

Solution
Pour calculer l'aire totale de la terrasse, on va :
- calculer l'aire de la partie ABCD
- calculer l'aire ABE délimitée par la parabole
- additionner les deux aires calculées précédemment.

1) Calculons l'aire ABCD
L'aire ABCD =AB×AD = 4×2 = 8 m^2
2) Calculons l'aire ABE
l'aire ABE=$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ m^2$.
3) l'aire de la terrasse est : $\frac{32}{3}+8 = \frac{56}{3}\ m^2$.

Conclusion
L'aire de la terrasse du professeur à la retraite est : $\frac{56}{3}\ m^2 \approx 18{,}66\ m^2$.

D- EXERCICES

Exercice 1
Réponds par V (vrai) ou F (faux) à chacune des affirmations suivantes

AFFIRMATIONS	REPONSES
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction définie par : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	

La primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction définie par $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1 est la fonction définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
Une primitive sur un intervalle I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction $u \times v$	

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants détermine toutes les primitives sur I de la fonction f

$a)\ f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$; $\mathrm{I} = \left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$ $\qquad b)\ f(x) = (3x+2)(3x^2+4x-7)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 3

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 - e^x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.

1) Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Calcule la limite en $-\infty$ de $f(x)$.

b) Montre que la droite (D) d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Trace (D) et (C).

5) Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$de la partie Δ du plan limitée par (C), la droite (D),les droites d'équations $\mathrm{x} = -2$ et $\mathrm{x} = 0$.